Universidade de Aveiro Instituto Superior de Contabilidade e Administração da Universidade de Aveiro
2011

Odete Maria de Oliveira Alves

Cálculo Financeiro e simuladores bancários: a teoria aplicada à prática real

Universidade de Aveiro
2011

Instituto Superior de Contabilidade e Administração
da Universidade de Aveiro

Odete Maria de Oliveira Alves

Cálculo Financeiro e simuladores bancários: a teoria aplicada à prática real

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Contabilidade - Ramo Fiscalidade, realizada sob a orientação científica da Doutora Margarida M. Pinheiro Professora Adjunta do Instituto Superior de Contabilidade e Administração da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente	Prof. Doutora Graça Maria do Carmo Azevedo Professora Adjunta do Instituto Superior de Contabilidade e Administração da Universidade de Aveiro
orientador	Prof. Doutora Margarida Maria Solteiro Martins Pinheiro Professora Adjunta do Instituto Superior de Contabilidade e Administração da Universidade de Aveiro
arguente	Prof. Doutora Fernanda Maria Campos de Sousa Professora Auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à minha orientadora Professora Doutora Margarida Pinheiro, cuja orientação foi crucial para que este estudo tenha seguido o rumo que seguiu e tenha chegado onde chegou, pelos seus ensinamentos ultrapassarem a esfera científica e académica, pelas palavras amigas "quando precisar de conversar e tomar um chá eu estou aqui", pela sua disponibilidade, preocupação, atenção, e ainda por todo o estímulo e encorajamento que transmitiu desde o primeiro dia.

Um particular agradecimento:

Á minha família pela compreensão e pelos fins de semana que não pode dispor da companhia deles. Obrigada mamã, pelo beijinho de encorajamento que todos os dias à mesma hora me incentivava para continuar.

Ao Rui, pela infinita paciência e pelo encorajamento nos momentos mais difíceis de stress, pelas suas sugestões, compreensão e seus ensinamentos, que contribuíram decisivamente para a concretização deste trabalho.

A todos os amigos que me acompanharam nesta caminhada, nomeadamente: às duas Margaridas, à Anabela, à Raquel e à Patrícia o meu sincero obrigada.

palavras-chave Cálculo Financeiro, Simulador Bancário, Juro, Capitalização, Renda

resumo

A presente tese debruça-se sobre a importância da linguagem financeira na vida corrente do cidadão ao lidar com as instituições financeiras em assuntos práticos e de interesse pessoal para aquele. Tendo por base esta problemática, emerge, como objetivo geral do presente trabalho, demonstrar como os conceitos teóricos do cálculo financeiro se relacionam com a informação apresentada nos simuladores disponíveis nas páginas da internet dos produtos financeiros oferecidos por diferentes instituições bancárias. No presente trabalho assumimos uma componente descritiva (pretendemos descrever uma situação e acumular conhecimentos passíveis de serem utilizados em futuras situações), uma componente avaliativa (pretendemos analisar uma situação) e uma componente de desenvolvimento (pretendemos utilizar os conhecimentos sobre uma situação para verificar se a mesma está implementada de acordo com as expetativas dos vários parceiros envolvidos).
Estimuladas pelas ideias apresentadas, algumas questões de investigação surgiram como pertinentes. Assim, procurámos perceber: se é possível desmistificar a designação “cálculo financeiro” e transpô-la dos manuais da área para o dia-a-dia, partindo de ferramentas que ajudem a resolver problemas concretos da relação entre as instituições financeiras e os seus clientes; e se a quantidade de informação pública disponibilizada pelas diferentes instituições financeiras, se revela transparente na forma como a mesma se apresenta ao consumidor. Como casos de estudo analisados, foram abordados os produtos financeiros: novo aforro familiar, plano poupança reforma, capital garantido e plano poupança complementar, tendo sido envolvidas três instituições bancárias – Banco Espírito Santo (BES), Banco Português de Investimentos (BPI) e Montepio Geral.
Com o presente trabalho parece-nos ser possível evidenciar três contributos fundamentais: a justificação da enorme aplicação prática de alguns conceitos do cálculo financeiro, evidenciada em situações recorrentes na nossa sociedade; a possibilidade de transposição das noções básicas de cálculo financeiro dos manuais da área para o dia-a-dia e a possibilidade de os mesmos proporcionarem ferramentas capazes de ajudarem a resolver problemas do quotidiano; e a evidência de que apesar de alguma informação financeira disponibilizada não apresentar o rigor dos conceitos teóricos subjacentes ao cálculo financeiro, se encontrar exemplos de informação pública transparente disponibilizada ao consumidor.

keywords Financial calculation, Bank Simulator, Interest, Capitalization, Income.

abstract

This thesis focuses on the importance of financial language in everyday life of citizens dealing with financial institutions in matters of personal and practical interest. Based on this, the general objective of the present work is the demonstration of how the theoretical concepts of financial calculation are related to the information presented in the simulators available on the internet pages of financial products offered by different banks.

In this work, we are taking an explanatory component (we intend to describe a situation and augment the usable knowledge for future situations), an evaluative component (we intend to analyze a situation) and a development component (we intend to use the knowledge about a situation to see if the same is implemented in accordance with the expectations of the various partners involved). Stimulated by the ideas presented, some research issues have emerged as relevant. So we seek to understand: if one can demystify the term "financial calculation" and transpose to everyday life from the manuals, expanding from tools that help to solve specific problems in the relationship between financial institutions and their customers; and whether the amount of public information provided by different financial institutions is clear in how it presents itself to the consumer. As case studies analyzed, we cover the following financial products: new family savings plan, retirement savings, guaranteed capital and supplementary savings plan, involving three banks – Banco Espírito Santo (BES), Portuguese Bank Investments (BPI) and Montepiol.

With the current work we believe possible to identify three fundamental contributions: the justification of the enormous use of financial calculation concepts in recurrent situations in our society; the possibility of implementing the basics of financial calculation from manuals to everyday life providing the same tools to help solving mundane problems; and the evidence that, despite the fact that some financial information available is not as accurate as the theoretical concepts underlying the financial calculation, we could find examples of clear public information available to the consumer.

Índice

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

Índice de Gráficos

Índice de Esquemas

INTRODUÇÃO

Nesta época de grandes mudanças nos mercados financeiros, o aprofundamento dos conceitos fundamentais do cálculo financeiro tornou-se uma exigência social e económica. Conforme refere Saias (2004) o domínio profundo dos instrumentos fundamentais do cálculo financeiro tem-se demonstrado essencial no campo profissional, em particular de todos aqueles que pretendem trabalhar em áreas direta ou indiretamente ligadas com o setor dos serviços financeiros. A sua falta constitui uma deficiência de formação base rapidamente detetada e penalizada pelo mercado empregador. É esse domínio essencial, para desempenhar, com profissionalismo, tarefas no âmbito do relacionamento com as instituições financeiras, de avaliação de alternativas de financiamento, da gestão de tesouraria e, muito especialmente, de gestão de investimento financeiro. No entanto, o conhecimento dos conceitos fundamentais do cálculo financeiro é muito mais abrangente. Segundo refere Matias (2009) o cálculo financeiro é uma ferramenta essencial com grande utilidade prática para os não financeiros. Foi por considerarmos que os conceitos fundamentais de cálculo financeiro estão presentes em inúmeras situações do quotidiano, tanto a nível profissional como a nível pessoal, que orientamos o nosso estudo para esta temática. Motivados pela procura de respostas, que os clientes reais das instituições financeiras pretendem obter para questões que se colocam na sua prática com a banca, procuramos, de alguma forma, desmistificar uma relação que, muitas vezes, parece supor-se pouco clara.

Para orientar a leitura desta realidade, desenvolvemos o quadro teórico que nos encaminhou ao longo de todo o trabalho. Em concreto, procurámos apresentar os conceitos que servem de base ao estudo do **Cálculo Financeiro**. No entanto, e por esta ser uma área de grande amplitude teórica, reduzimos o nosso quadro conceptual ao nível das rendas financeiras, uma vez que estas se afiguram como base teórica amplamente utilizada nos produtos oferecidos pelas instituições financeiras. Por outro lado, motivados pelo reconhecimento e importância atribuída aos simuladores disponíveis no sítio da internet de diferentes instituições financeiras, assumimos o pressuposto de que a análise empírica dos mesmos se poderia constituir um instrumento heurístico pertinente para a compreensão da linguagem teórica na área.

Assim, e com o intuito de orientar a discussão teórica que conduz a investigação, analisámos quais os conhecimentos de base necessários ao entendimento contextual do estudo, apresentando conceitos e identificando relações entre eles. Neste ponto introduzimos e relacionámos a noção de juro, de processos de capitalização e de atualização e de equivalência financeira. De seguida, e à luz do suporte teórico até aí desenvolvido, foi possível iniciar o estudo das rendas financeiras. Uma vez que a intenção que subscreveu todo o quadro teórico se baseou na procura de um entendimento inequívoco das noções apresentadas, todos os resultados conseguidos a nível teórico foram deduzidos a partir dos conceitos definidos a montante.

Tendo estes paradigmas como pano de fundo, emerge como objetivo geral do presente trabalho, demonstrar como os conceitos teóricos do cálculo financeiro se relacionam com a informação apresentada nos simuladores disponíveis nas páginas da internet dos produtos financeiros oferecidos por diferentes instituições bancárias. Estimuladas pelas ideias apresentadas, algumas questões de investigação surgiram como pertinentes. Assim, procurámos perceber: se é possível desmistificar a designação "cálculo financeiro" e transpô-la dos manuais da área para o dia-a-dia, partindo de ferramentas que ajudem a resolver problemas concretos da relação entre as instituições financeiras e os seus clientes; e se a quantidade de informação pública disponibilizada pelas diferentes instituições financeiras, se revela transparente na forma como a mesma se apresenta ao consumidor.

Com este trabalho, pretendemos reforçar a ideia de que a linguagem financeira se constitui como uma ferramenta essencial (porque aplicável em situações quotidianas) quer para as instituições financeiras quer para os não financeiros, nomeadamente através da resolução de casos práticos com recurso aos simuladores disponíveis ao público nos sítios da internet das instituições.

Guiados pelos objetivos e pelas questões formuladas, procurámos envolver na análise empírica um conjunto diversificado de instituições financeiras e de produtos financeiros. No entanto, por nos parecer que o trabalho apontado se apresentava complexo e extenso face aos recursos de uma tese de mestrado no modelo de Bolonha, revelou-se necessário limitar o número de casos de estudo a considerar. Uma vez que a intenção do trabalho não se sustenta nem numa análise exaustiva nem numa análise comparativa das condições oferecidas pelas diferentes instituições, uma seleção possível tomou por base uma amostra de três instituições financeiras, nomeadamente o Banco Espírito Santo (BES), Banco Português de Investimentos (BPI) e o Montepio, relativa a quatro produtos financeiros, a saber: novo aforro familiar, plano poupança reforma, capital garantido e poupança complementar.

Este estudo está organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo encontra-se delineado em torno da apresentação teórica dos conceitos básicos inerentes ao cálculo financeiro. No segundo capítulo abordamos o tema com maior relevância na aplicação prática dos casos estudados: rendas financeiras. Após a explanação dos conceitos teóricos, o terceiro capítulo incide sobre os aspetos metodológicos deste estudo. É aqui que balizamos as estratégias que presidiram à construção do objeto e do objetivo do estudo, e se enunciam as opções tomadas quanto à recolha e tratamento dos casos analisados. Posteriormente, no quarto capítulo, descrevem-se e interpretam-se os casos de estudo apresentados. Por fim, o quinto e último capítulo é dedicado às principais conclusões extraídas deste trabalho.

CAPÍTULO I - ENQUADRAMENTO GERAL E CONCEITOS BÁSICOS

1. Enquadramento geral e conceitos básicos

O rendimento dos agentes económicos pode ser aplicado de duas formas distintas: em consumo ou em poupança. Define-se por consumo o total de despesa em bens e serviços que tenham um tempo de vida determinado, de carácter duradouro ou não duradouro, e que sejam utilizados de um modo específico. A poupança é a diferença entre o rendimento e o consumo (CANADAS, 1998). Pode ser mantida na forma líquida da moeda, ou pode ser investida, durante um determinado período de tempo, dando lugar à produção de uma certa remuneração, o juro, para o seu proprietário. A importância do fator tempo é crucial em qualquer problema de ***Cálculo Financeiro***. Intuitivamente, sabemos que um mesmo capital não tem o mesmo valor consoante possa ser utilizado de imediato ou apenas passado algum tempo. Ou, como refere Matias (2009) o valor temporal do dinheiro tem por base a preferência pela liquidez: atribuímos mais valor a podermos dispor de um capital o mais cedo possível do que mais tarde. Assim, um dos elementos fundamentais do Cálculo Financeiro é o tempo. Simultaneamente, o juro encarado como a remuneração pela cedência de um capital durante um determinado período, ou encarado como o valor a pagar pelo uso de um capital alheio durante um determinado período, é outro elemento fundamental do Cálculo Financeiro. Assim, através do investimento, a poupança converte-se num capital financeiro entendido como todo o conjunto de capitais cedidos durante um determinado espaço de tempo, capazes de produzirem uma certa remuneração, o juro, para o seu proprietário (CADILHE et al., 1988). A ação que tem por finalidade modificar quantitativamente um ou mais capitais, por ação do tempo e do juro, designa-se por operação financeira (MATIAS, 2009). No estudo das operações financeiras reside a área de interesse do Cálculo Financeiro.

De uma forma simplista, pode-se afirmar que o objetivo do Cálculo Financeiro é dar respostas a questões como:

- Quanto receberei por uma aplicação de determinado capital no final de um determinado período de tempo?
- Qual o valor que devo depositar periodicamente para atingir uma determinada poupança desejada?
- Qual o valor que pagarei mensalmente por um empréstimo?
- Qual o valor a receber numa determinada poupança se optar por um resgate periódico?

Para determinação do valor do juro, a entidade que cede o capital (também designada por credora, mutuante ou prestamista) e a entidade a quem é emprestado o capital (também designada por devedora, mutuária ou prestatária) estabelecem: i) o período de capitalização (a duração unitária do juro) e ii) a taxa unitária relativa ao período escolhido (o juro produzido por uma unidade de capital nesse período). Na prática, é usual chamar taxa de juro não ao juro gerado por uma unidade de capital numa unidade de tempo, mas sim ao juro gerado por 100 unidades de capital numa unidade de tempo.

No caso particular das instituições financeiras, são realizados, tradicionalmente, dois tipos de operações: as operações em que as entidades concedem créditos e as operações em que aceitam depósitos, cada uma delas com várias modalidades e com diferentes taxas de juro. As operações bancárias dividem-se, ainda, em operações ativas e operações passivas: as primeiras são aquelas que tem subjacente o recebimento de taxas de juro por parte das instituições financeiras e, as segundas, aquelas que têm implícito o pagamento de taxas de juro por parte das instituições financeiras. Associada a cada uma destas operações financeiras está implícita a aplicação de taxas de juro, ativas a operações ativas (contabilisticamente contribuem para o proveito da instituição financeira) e passivas a operações passivas (contabilisticamente contribuem para os custos da instituição financeira). A lógica destas taxas de juro consiste na diferenciação entre capitais depositados e capitais emprestados, ou seja, em remunerar capitais depositados a determinada taxa de juro e cobrar pelos capitais emprestados uma taxa de juro superior. Esta diferença entre taxa de juro passiva e ativa designa-se por *spread*, sendo uma das principais fontes de receita das instituições financeiras. As taxas de juro das operações financeiras estão indexadas a taxas de referência, que se designam por indexantes. A taxa indexante mais utilizada é a Euribor (EBF, 2010). As taxas Euribor baseiam-se na média das taxas de juro praticadas em empréstimos interbancários realizados entre um grupo de bancos europeus de referência. Cada taxa Euribor está associada a um determinado prazo. Por exemplo, na maioria dos empréstimos bancários para compra de habitação o indexante mais utilizado é a Euribor a 6 meses, habitualmente representado por Euribor 6M, à qual as instituições financeiras aplicam um *spread* negociável.

No caso das instituições financeiras, os acordos que envolvem taxas de juro regem-se sempre por legislação específica do Código Civil e da atividade financeira, consolidada com a legislação do Ministério das Finanças e na atuação do Banco de Portugal e das Instituições Financeiras.

Nesta perspetiva, o presente capítulo define e contextualiza conceitos básicos inerentes ao cálculo financeiro. Mais concretamente, são definidos os conceitos de juro, taxas de juro, processos de capitalização, de atualização e de equivalência financeira. Com este capítulo, pretendemos informar sobre as noções e relações necessárias à compreensão da linguagem financeira que suporta o trabalho.

2. Juro e processos de capitalização

A capitalização é a transformação, provocada pelo tempo, de um capital em capital mais juro (CADILHE et al., 1988). O valor do juro relativo a um processo de capitalização depende do capital inicial C, do tempo de duração do processo t e da taxa de juro convencionada. Ou seja, o juro é função do capital e do tempo $J = J(C,t)$. A função juro satisfaz duas condições iniciais, reconhecidas como princípios fundamentais de todo o Cálculo Financeiro (CADILHE et al., 1988):

1) O juro de um capital nulo ou/e de um tempo nulo deve ser nulo

$$J(0,t) = J(C,0) = J(0,0) = 0$$

2) Todo o juro é não negativo (se há capital e tempo há lugar à formação de juro)

Se $C > 0$ e $t > 0$ então $J(C,t) > 0$

Na prática, convencionou-se que o juro se vence periodicamente (MATEUS, 1999), contando-se tantos juros periódicos quantos os períodos que dura o processo de capitalização (CADILHE et al., 1988). Ou, tal como refere Mateus (1999), a capitalização é a adição do capital ao juro, no momento do vencimento deste. Ao resultado da adição do juro ao capital chama-se valor acumulado, constituindo-se o intervalo de tempo que preside à formação do juro com o período de capitalização (MATIAS, 2009). Um capital financeiro de quantia monetária C e vencimento t é usualmente representado pelo par (C,t).

Tabela 1 - Tabela de base de cálculo para contagem de prazos (Baseado em Matias, (2009)).

Base de Cálculo	Explicação
ACT/ACT (ou REAL/REAL)	Numerador: dias reais entre as duas datas, tendo em consideração a exigência de anos bissextos. Denominador: dias reais do ano (365, se for ano comum, 366, se for ano bissexto).
ACT/365 (ou REAL/365)	Numerador: dias reais entre as duas datas, tendo em consideração a exigência de anos bissextos. Denominador: 365 dias (mesmo que se trate de um ano bissexto).
ACT/360 (ou REAL/360)	Numerador: dias reais entre as duas datas, tendo em consideração a exigência de anos bissextos. Denominador: 360 dias (independente de se tratar de um ano comum ou bissexto). O Dec. - Lei nº 88/2008, de 29 de Maio, cujo art.º 2º altera os artigos 3º e 4º do Dec. - Lei nº 430/91, de 2 de Novembro, obriga as instituições financeiras a utilizar esta base de cálculo.
30/360	Numerador: admite-se que todos os meses têm 30 dias e conta-se o prazo em conformidade com esta hipótese. Denominador: 360 dias (independente de se tratar de um ano comum ou bissexto). Nota: nesta base de cálculo distingue-se dois procedimentos: o Europeu, representado por 30 (E)/360, e o Americano, representado simplesmente por 30/360.

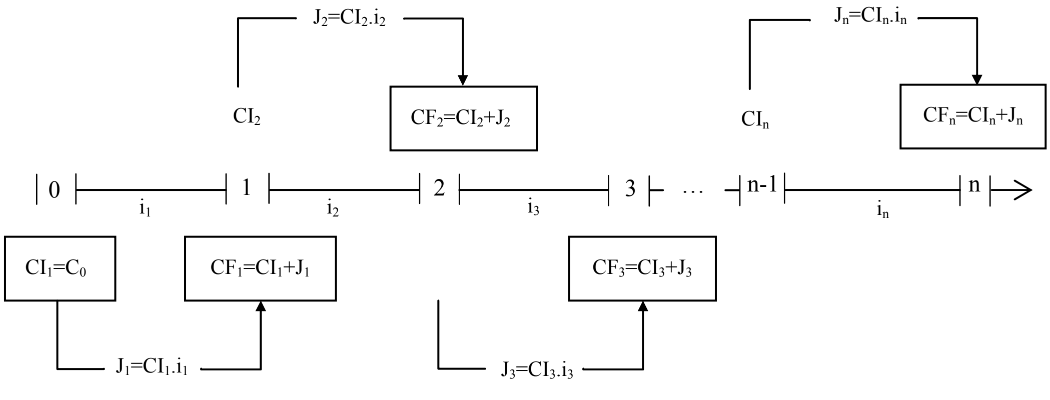
Relativamente ao cálculo do juro, é desde logo importante reter duas observações: o problema da contagem do tempo e o problema das unidades em que se exprime. De acordo com diversos estudos (MATIAS, 2009) a contagem de tempo entre duas datas pode ser efetuada de vários modos, nomeadamente em anos, meses ou dias. Relativamente à contagem de tempo em dias (situação mais frequente), é possível considerar diferentes bases de cálculo para contagem de prazos. A Tabela 1 apresenta as bases de cálculo mais frequentemente utilizadas:

Relativamente ao problema das unidades em que a taxa de juro se exprime, a regra consiste em expressar o tempo nas unidades da taxa.

De modo a clarificar os problemas e questões colocadas no âmbito do Cálculo Financeiro, vários são os autores que frequentemente utilizam representações esquemáticas sobre uma reta temporal (MATIAS, 2009). Tais diagramas cronológicos evidenciam quer os diferentes momentos de vencimento dos capitais, quer os períodos de formação do juro envolvidos, quer, ainda, outros elementos passíveis de justificar as situações que se pretendem tratar.

A análise periódica da capitalização pressupõe que em cada período k há um capital periódico inicial (CI_k), um capital periódico final (CF_k) e um juro periódico (J_k) resultante do processo periódico de capitalização. Axiomaticamente, o juro num determinado período é diretamente proporcional ao valor do capital no início do período. O juro de período k obtém-se multiplicando o capital inicial deste período pela taxa de juro do mesmo período (SAIAS et al., 2004). O capital final de um período é igual ao capital inicial respetivo adicionado do juro desse período. O diagrama temporal representado no Esquema 1 pretende elucidar tal processo.

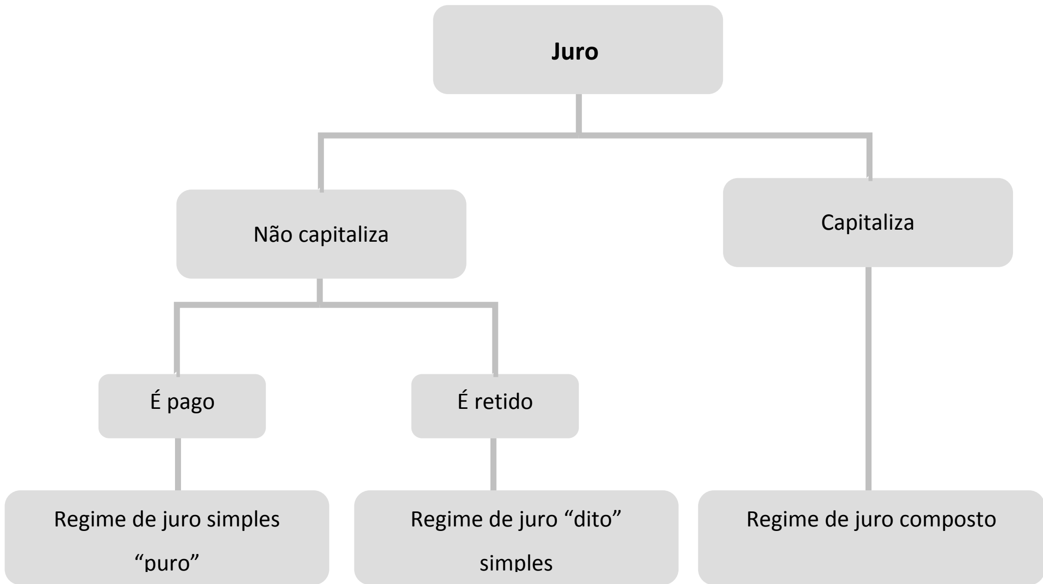
Esquema 1 - Processo de capitalização do juro - diagrama cronológico da evolução de um capital.



Consideremos a seguinte simbologia:

- Capital periódico inicial: CI_K
- Juro periódico: J_K que conforme indicado é dado por $J_K = CI_K \times i_K$
- Capital periódico final: CF_K que conforme indicado é dado por $CF_K = CI_K + J_k$

Esquema 2 - Caraterização do regime de capitalização em função do destino do juro (Baseado em Matias, (2009)).



Consoante o destino a dar ao juro no final de cada período de capitalização, é possível contemplar diferentes regimes de capitalização. De facto, aos juros uma vez produzidos duas coisas podem acontecer (MATIAS, 2009):

1) Se os juros saem do processo de capitalização no momento do seu vencimento, permanecendo constante o capital inicial de cada período, estamos em presença do designado regime de juro simples (puro). Em certas operações de curto prazo (prazo inferior a 1 ano), a prática convencionou que o juro pode ficar muitas vezes no processo, mas sem render novo juro. Este é o designado regime de juro "dito" simples ou regime (simples) convencional. No primeiro caso o juro é efetivamente pago em cada período enquanto que no segundo caso ele é retido sem

que seja capitalizado. Apesar de este processo contrariar os princípios fundamentais do Cálculo Financeiro atrás identificados, é uma situação real que temos que considerar. Em qualquer dos casos (é efetivamente pago ou é retido) o juro não capitaliza. Para efeitos do presente trabalho e não havendo perigo de confusão, identificamos o regime de juro simples com o regime (simples) convencional (RJS).

2) É introduzido no capital que vai iniciar o período seguinte, gerando ele próprio juro. Ou seja, no momento do seu vencimento, os juros são recapitalizados no processo, dando origem ao juro de juro. Este processo designa-se por regime de juro composto ou regime de capitalização composta (RJC ou RCC).

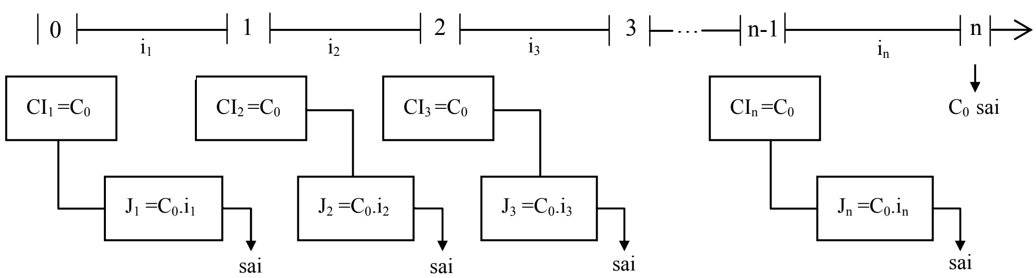
O Esquema 2 pretende dar conta das situações apresentadas quanto aos regimes de capitalização.

2.1 Capitalização em regime de juro simples

O regime de juro simples é caracterizado pelo facto de o juro ser sempre calculado em cada período de capitalização a partir do capital inicial, não sendo introduzido nos períodos seguintes. O juro é pago no fim de cada período. O capital que produz juro é sempre constante e igual ao capital inicial. O juro periódico que sai do processo é, deste modo, constante.

Admitindo o caso mais geral em que a taxa de juro varia em cada período de capitalização, temos o seguinte diagrama cronológico (Esquema 3):

Esquema 3 - Comportamento do juro em regime de juro simples: diagrama cronológico.



Como o juro sai do processo de capitalização, não faz sentido falar em juro total (uma vez que sai do processo, não se sabendo o seu destino). Pela mesma razão, não faz sentido falar em capital acumulado, pelo menos no sentido teórico anteriormente dado.

2.2 Capitalização em regime de juro dito simples (regime simples convencional)

Na prática, em regime dito simples e como desvio à teoria exposta, consideramos que o juro fica no processo mas sem render novo juro, considerando o capital acumulado como todo o capital que se encontra no processo no final da capitalização.

Seja C_n o capital acumulado após n períodos de capitalização. Admitindo que a taxa de juro se mantém constante em cada período (uma vez que o regime é apenas aconselhado em situações de curto prazo, sendo esta a situação mais frequente), percebemos que o juro periódico obtido é tal que:

$$J_1 = J_2 = \ldots = J_n = C_0 \times 1 \times i = C_0 i$$

De onde o juro total após n períodos de capitalização é dado por:

$$J_{total} = J_1 + J_2 + \ldots + J_n$$

$$J_{total} = C_0 i + C_0 i + \ldots + C_0 i$$

$$J_{total} = nC_0 i$$

$\boxed{J_{total} = C_0 ni}$ Juro total em regime dito simples

Analogamente, e no entendimento acima descrito, o capital acumulado no final do processo é dado por:

$$C_n = C_0 + J_{total}$$

$$C_n = C_0 + C_0 ni$$

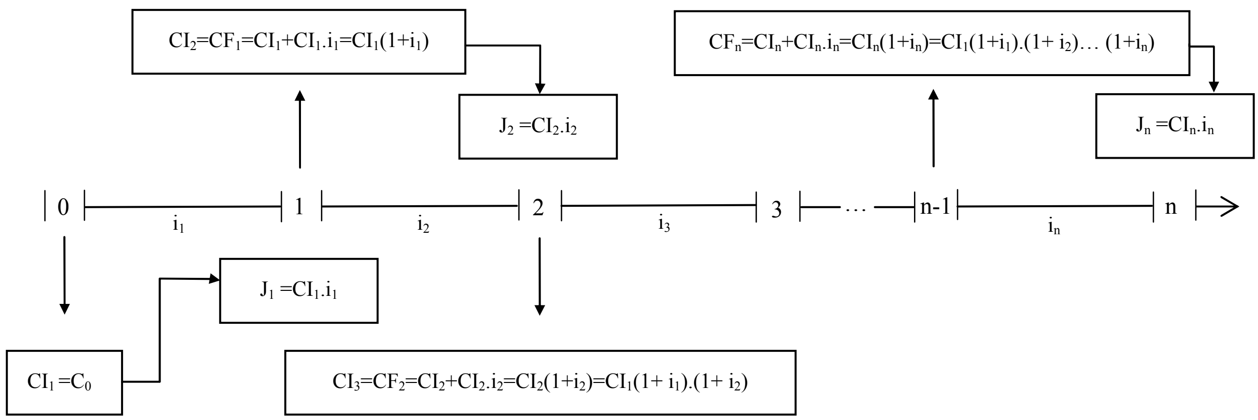
$\boxed{C_n = C_0(1+ni)}$ Montante de capital acumulado em regime dito simples

2.3 Capitalização em regime de juro composto

Contrariamente ao regime de juro simples, os juros produzidos no regime de juro composto não são excluídos do processo de capitalização. Estes juros vencidos são adicionados ao capital, vencendo também juros nos períodos seguintes. O capital ao longo do processo de capitalização vai, assim, aumentando sucessivamente, pelo efeito de adição do juro no final de cada período. Ou seja, em regime de juro composto, os juros relativos a cada período não são constantes, mas sim crescentes. Os juros, no momento do seu vencimento, são recapitalizados no processo de capitalização, pelo que no interior do processo há juros de juros.

De acordo com a simbologia que temos vindo a utilizar, o Esquema 4 pretende explanar o esquema de formação de juro em regime composto.

Esquema 4 - Comportamento do juro em regime de juro composto: diagrama cronológico.



Generalizando, o capital inicial de período K é dado por:

$$CI_k = CF_{k-1} = C_0 \prod_{x=1}^{k-1} (1 + i_x)$$

Enquanto o respetivo juro do período K é dado por:

$$J_k = C_0 \prod_{x=1}^{k-1} (1 + i_x) i_k$$

Pelo que o capital final (valor acumulado) ao final de n períodos é dado por:

$$CF_n = C_0 \prod_{i=1}^{n} (1 + i_x)$$

Em particular, se a taxa de juro se mantém invariável ao longo do processo, sendo i o seu valor constante, as fórmulas anteriores tomam a forma:

$$CI_k = C_0(1+i)^{k-1}$$

$$J_k = C_0(1+i)^{n-1} i$$

$$\boxed{C_n = C_0(1+i)^n}$$ Montante de capital acumulado em RCC

O juro total obtém-se pela diferença entre o montante de capital acumulado e o capital inicial

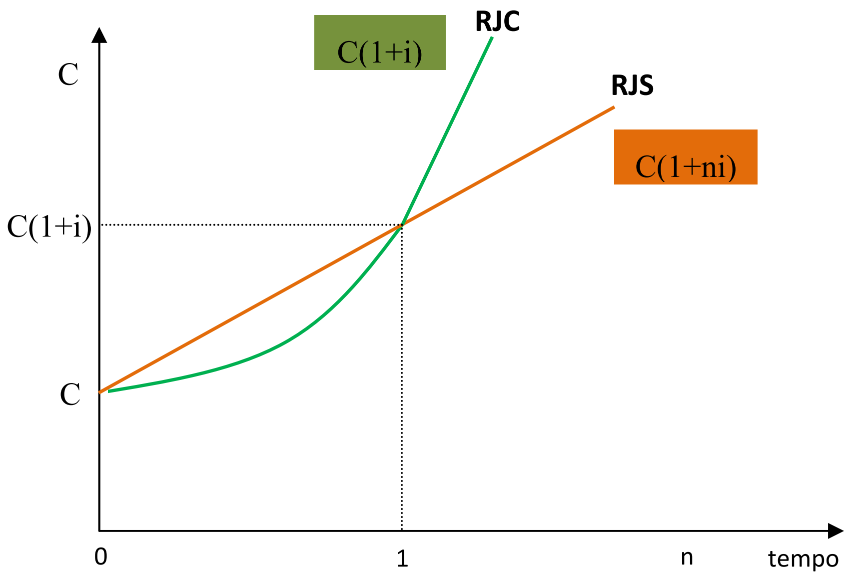
$$J_{total} = C_n - C_0$$

$$J_{total} = C_0(1+i)^n - C_0$$

$$\boxed{J_{total} = C_0\left[\ (1+i)^n - 1\ \right]}$$ Juro total em RCC

A representação gráfica do valor acumulado entre os dois regimes de capitalização evidencia o comportamento linear do regime simples e o comportamento exponencial do regime composto (Gráfico 1).

Gráfico 1 - Comparação entre o valor acumulado em regime de juro simples e em regime de juro composto.



Da interpretação gráfica verifica-se que, para valores de n inferiores a 1, o capital acumulado em regime de juro simples é superior ao do juro composto; no entanto, a situação inverte-se para valores superiores a 1, acentuando-se esta diferença à medida que n aumenta.

2.4 Regimes mistos

Entre os regimes simples e composto estudados, é possível considerar regimes mistos, onde há recapitalização parcial dos juros periódicos e/ou o reembolso parcial do capital inicial ou, ainda, o reforço de capital com novas entradas. Assim, excluindo a entrada de capital inicial e a saída do capital final, num processo de capitalização e quanto ao capital, podemos ter: (1) só entradas; (2) só saídas; (3) entradas e saídas ou (4) nem entradas nem saídas. Simultaneamente e quanto ao juro periódico, podemos considerar: (a) recapitalização em 100%; (b) recapitalização em 0% ou (c) recapitalização parcial. Da conjugação das diferentes modalidades de capital e de juro, é pois possível referir uma multiplicidade de combinações possíveis de regimes de capitalização.

3. Taxas de juro

Como referido anteriormente, o processo de capitalização é muitas vezes passível de ser analisado em subprocessos periódicos. Tal facto conduz-nos à preocupação em saber como fazer equivaler taxas de juro com diferentes períodos. Outra questão de interesse prende-se com o facto de as taxas refletirem ou não o efeito da fiscalidade. Outra questão ainda prende-se com o efeito da inflação sobre as taxas de juro. Estas e outras preocupações contextualizam a introdução de diferentes conceitos relativos a taxas de juro que a seguir se apresentam.

Para efeitos de uniformização de critérios, assente-se nas notações:

1) $\boldsymbol{i}$ para taxa de período 1 (unidade)

2) $\boldsymbol{i_k}$ para taxa de período $1/k$ (da unidade)

3.1 Taxas equivalentes e taxas proporcionais

Duas taxas de juro referidas a períodos de tempo diferentes dizem-se equivalentes num determinado regime, se quando aplicadas a capitais iguais durante igual período de tempo produzem o mesmo valor acumulado (ou juro) (QUELHAS et al., 2009).

Duas taxas de juro referidas a períodos de tempo diferentes dizem-se proporcionais se a razão (o quociente) entre elas for a mesma que existe entre os períodos de tempo a que as mesmas se referem (MATIAS, 2009).

3.1.1 Taxas equivalentes em regime simples convencional

Sejam i e i_k duas taxas de período 1 e $1/k$, respetivamente. Considerando o RJS, as duas taxas são equivalentes se o montante por elas produzido, para o mesmo período de tempo n e sobre o mesmo capital C, for igual:

$$i \equiv i_k \quad \Leftrightarrow \quad C(1+ni) = C(1+kni_k)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+ni = 1+kni_k$$

$$\Leftrightarrow \quad ni = kni_k$$

$$\Leftrightarrow \quad i = ki_k$$

Mas tal significa que as taxas i e i_k são proporcionais uma vez que:

$$\underbrace{\frac{i}{i_k}}_{\text{Razão entre as taxas}} = \underbrace{\frac{1}{1/k}}_{\text{Razão entre os respetivos períodos}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{i}{i_k} = k \quad \Leftrightarrow \quad i = ki_k$$

O que permite concluir que, em RJS, a equivalência de taxas se reduz à sua proporcionalidade (MATEUS, 1999).

Em particular $i = ki_k \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{i_k = \frac{i}{K}}$ Equivalência de taxas em RJS

No regime simples são equivalentes as taxas proporcionais.

3.1.2 Taxas equivalentes em capitalização composta

Sejam i e i_k duas taxas de período 1 e $1/k$, respetivamente. Considerando o RCC, as duas taxas são equivalentes se o montante por elas produzido, para o mesmo período de tempo n e sobre o mesmo capital C, for igual:

$$i \equiv i_k \quad \Leftrightarrow \quad C(1+i)^n = C\left(1+i_k\right)^{nk}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+i)^n = \left(1+i_k\right)^{nk}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+i)^n = \left[\left(1+i_k\right)^k\right]^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(1+i) = \left(1+i_k\right)^k}$$ Relação de equivalência entre taxas efetivas em RCC

3.2 Taxas efetivas e taxas nominais

De acordo com Quelhas e Correia (2009), uma taxa é efetiva quando o período a que se reporta coincide com o período de capitalização que lhe está associado. Dito de outra forma, uma taxa é efetiva quando, de facto, preside à formação de juro. E dizem-se taxas nominais as taxas que são declaradas em vigor num processo de capitalização. Ou seja, como refere Matias (2009), a distinção entre taxas nominais e taxas efetivas tem a ver com o facto de refletirem, ou não, a existência de juros de juros, pelo que, a distinção entre os dois tipos de taxas só se coloca em RCC. Enquanto isto, tanto no regime de juro simples como no regime dito simples, uma vez que as taxas proporcionais são taxas equivalentes, resulta que qualquer taxa nominal é também taxa efetiva (QUELHAS et al., 2009). Assim, a problemática da diferenciação entre taxas de juro efetivas e taxas de juro nominais coloca-se apenas ao nível do regime de capitalização composta, em que as taxas proporcionais não são equivalentes, e vice-versa (QUELHAS et al., 2009). Particularmente interessante nos parece a posição de Cadilhe e Soares (1988), quando explicam que a razão desta prática diferenciada entre as duas nomenclaturas deriva da maior dificuldade em explicar ao cidadão comum, o mecanismo de formação de juro composto. Por fim saliente-se que, enquanto numa taxa efetiva apenas se faz referência a um período

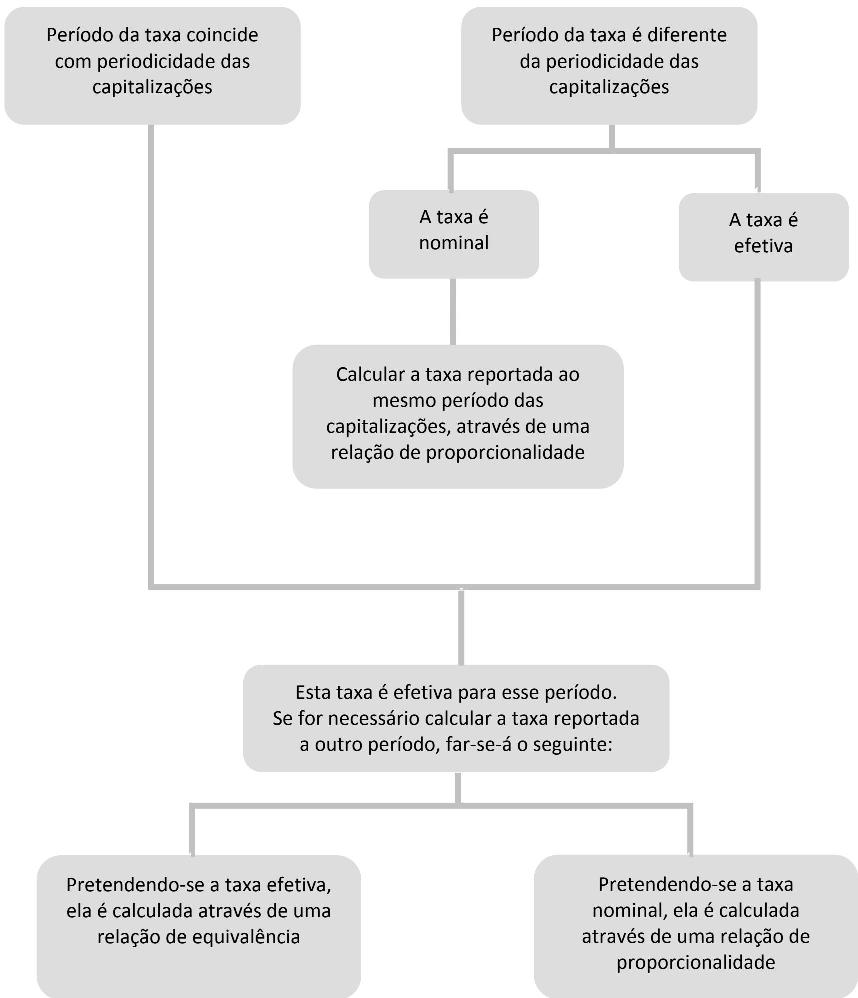
(período de formação do juro), numa taxa nominal há sempre dois períodos indicados: o período da taxa e o período de formação do juro.

Se a capitalização se efetua k vezes (frequência k), na unidade, sendo i_k a taxa efetiva, no período de capitalização $1/k$, denomina-se taxa nominal de frequência k ou taxa nominal convertível k vezes na unidade $i\ (k)$, à taxa de período 1, proporcional a i_k, tal que:

$$\frac{i(k)}{i_k} = \frac{1}{1/k} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{i(k)}{i_k} = k$$

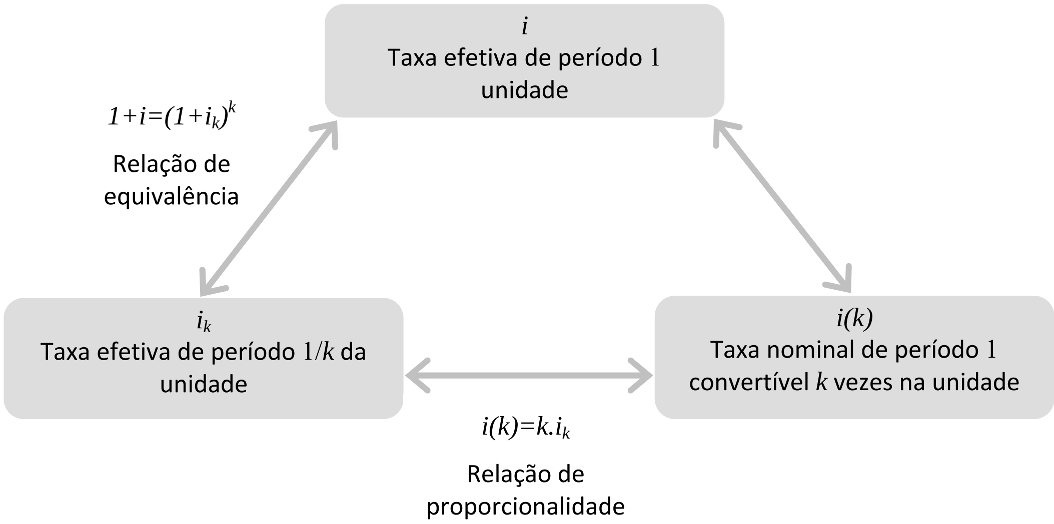
$\Leftrightarrow \boxed{i(k) = ki_k}$ Relação de proporcionalidade entre taxa nominal e taxa efetiva em RCC

Esquema 5 - Resumo dos principais aspetos relativos a conversão de taxas em regime de juro composto (Baseado em Matias, (2009)).



O Esquema 5 e Esquema 6 pretendem resumir e simplificar os conceitos anteriores.

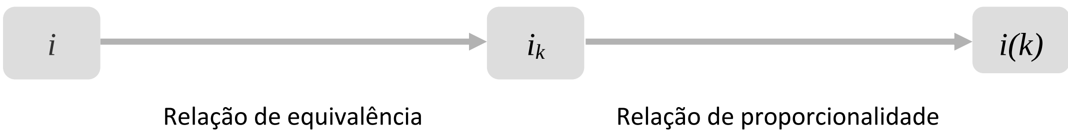
Esquema 6 - Relação entre taxas efetivas e nominais em RCC.



As duas fórmulas matemáticas apresentadas nos Esquema 6 e Esquema 7 pretendem resumir e simplificar os conceitos anteriores.

O Esquema 6 permite formalizar a relação entre i e $i\ (k)$.

Esquema 7 - Relação entre i e $i(k)$



De facto,

1) Se a considerarmos uma taxa real i, a taxa real no período de capitalização i_k, será sua equivalente. Será pois:

$$(1+i_k)^k=(1+i) \quad \Leftrightarrow \quad i_k=(1+i)^{\frac{1}{k}}-1$$

A correspondente taxa nominal $i\ (k)$ de período 1 será:

$$i(k)=k\left[(1+i)^{\frac{1}{k}}-1\right]$$

2) Se a considerarmos como taxa nominal $i(k)$, a taxa real no período de capitalização, i_k, será sua proporcional. Será então:

$$i(k) = k\, i_k \quad \Leftrightarrow \quad i_k = \frac{i(k)}{k}$$

A correspondente taxa real, i, de período 1 será:

$$(1+i) = \left[1 + \frac{i(k)}{k}\right]^k \quad \Leftrightarrow \quad i = \left[1 + \frac{i(k)}{k}\right]^k - 1$$

3.3 *Taxas líquidas e taxas ilíquidas*

A grande distinção entre taxas líquidas e ilíquidas tem a ver com o facto de refletir ou não o efeito da fiscalidade. Como é do conhecimento geral, os juros produzidos através de um processo de capitalização estão sujeitos à tributação em sede de IRS. Ou seja, sempre que há juro, há imposto. Este imposto é calculado segundo a aplicação de taxas liberatórias sobre o total do juro produzido em cada período de capitalização, o que significa que o aforrador só beneficiará de uma percentagem do juro produzido (MATIAS, 2009).

Desta forma, chama-se taxa ilíquida ou taxa bruta, à taxa que não reflete o efeito fiscal e taxa líquida à taxa que reflete o efeito fiscal.

Considerando:

i_{liq} - Taxa líquida

i_{iliq} - Taxa ilíquida

t_{imp} - Taxa do imposto

Temos: $i_{liq} = i_{iliq} - t_{imp}\, i_{iliq}$

$\boxed{i_{liq} = (1 - t_{imp})\, i_{iliq}}$ Relação entre taxa líquida e taxa ilíquida

3.4 *Taxas correntes e taxas reais*

Uma outra variável que influencia as taxas de juro é a inflação. A inflação é uma subida sustentada e continuada do nível geral dos preços e, por oposição, a deflação é entendida como uma descida sustentada e continuada do nível de vida. Designa-se por taxa corrente a taxa de juro que não reflete o efeito da inflação; designa-se por taxa real a taxa de juro que reflete este efeito.

Admitindo deflação (o nível geral dos preços baixa), como os preços descem, os juros produzidos permitem que o investidor tenha, em termos reais, um maior poder de compra. Ou seja, a taxa real é superior à taxa corrente. Por outro lado, admitindo inflação (o nível geral dos preços aumenta), o investidor vê diminuído o seu poder económico pelo que a taxa real é inferior à taxa corrente (MATIAS, 2009).

Assim, em épocas de inflação, o juro é um compósito de duas partes: uma que mantém o valor real do capital e uma outra que compensa a erosão monetária (CANADAS, 1998). Logo, o valor acumulado de um capital C_0 à taxa corrente i, resulta de duas capitalizações cumulativas: a que compensa a inflação e a capitalização real.

Considerando:

i - Taxa corrente

I - Taxa de inflação

i_{real} - Taxa de juro real

Para 1 período:

$$C_0(1+i) = C_0(1+I)(1+i_{real})$$

$$\Leftrightarrow 1+i = (1+I)(1+i_{real})$$

$$\Leftrightarrow 1+i = 1+i_{real} + I + Ii_{real}$$

$$\Leftrightarrow i = i_{real} + I + Ii_{real}$$

$$\Leftrightarrow i = i_{real}(1+I) + I$$

$$\Leftrightarrow i - I = i_{real}(1+I)$$

Desta forma, podemos deduzir a expressão da taxa de juro real de uma aplicação em função da taxa de juro corrente e da taxa de inflação:

$$i_{real} = \frac{i - I}{1 + I}$$ Taxa de juro real de uma aplicação em função da taxa de juro corrente e da taxa de inflação

3.5 Taxas de rendibilidade efetiva e taxas de custo efetivo

A taxa de custo efetivo/rendibilidade efetiva é a taxa que torna equivalentes as prestações do mutuante e do mutuário, ou seja, torna o valor recebido equivalente ao valor cedido (em RJC). O cálculo destas taxas anuais efetivas em operações financeiras é importante, tanto para as instituições de crédito como para os utilizadores de crédito, pois determinam a rendibilidade efetiva das operações para o mutuante ou comparam os custos de fontes alternativas de crédito para o mutuário.

Para o sujeito ativo, a taxa de rendibilidade efetiva de uma operação financeira deve ter em conta todas os recebimentos (juros, prémios de reembolso, participações em lucros), o valor líquido de impostos destes rendimentos e a taxa efetiva (não nominal).

Para a formalização matemática envolvendo estas taxas, consideremos as seguintes notações:

JL_k – Juro líquido

R_k – Reembolso de capital

ORL_k – Outros recebimentos líquidos

A taxa de rendibilidade líquida efetiva é dada por:

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(JL_k + R_k + ORL_k \right)\left(1 + r\right)^{-k}$$ Taxa de rendibilidade líquida efetiva onde C_0 corresponde ao valor cedido e $(JL_k + R_k + ORL_k)$ ao valor recebido

Para o sujeito passivo, a taxa de custo efetivo de uma operação financeira deve ter em conta os encargos (reembolsos, juros, comissões e prémios de seguro), bonificações de juros, poupança fiscal sobre juros e a taxa efetiva (não nominal).

Desta forma consideremos:

D_0 – Despesas iniciais

J_k – Juro

R_k – Reembolso de capital

OE_k – Outros encargos

B_k – Bonificações

GF_k – Ganho fiscal

A taxa de custo efetiva é dada por:

$$\boxed{C_0 - D_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(R_k + J_k - B_k + OE_k - GF_k\right)(1+r)^{-k}}$$

Taxa de custo efetiva onde $(C_0 - D_0)$ corresponde ao valor recebido e $(R_k+J_k-B_k+OE_k-GF_k)$ ao pagamento efetuado.

4. Generalização da fórmula do montante em regime de capitalização composta para qualquer valor do tempo

Uma questão que tem interesse colocar, por ser de grande aplicação prática, é a obtenção de um montante quando, em RCC, o tempo de capitalização não coincide com um número inteiro de períodos da taxa.

Sem perda de generalização suponhamos que, dada a taxa i, o tempo t de duração da capitalização corresponde a um número não inteiro de períodos de i, tal que:

$t = n + \dfrac{h}{k}$, com n inteiro $n = 0,1,2,\ldots$ e $h < k$

Ou seja, durante os n períodos inteiros da taxa i, a capitalização decorre nos moldes anteriormente definidos para o RCC. O problema coloca-se sobre que tipo de solução dar ao período de tempo n/k que não chega a completar um período da taxa i.

Nestas condições a capitalização define-se mediante duas possíveis soluções:

1) Solução teórica ou exponencial

Esta solução consiste em utilizar uma taxa equivalente para a fração do período da capitalização, ou seja:

$$C_n = C(1+i)^n(1+i)^{\frac{h}{k}} \Leftrightarrow \boxed{C_n = C(1+i)^{n+\frac{h}{k}}}$$ Solução teórica ou exponencial

2) Solução prática ou linear

Esta solução consiste em utilizar uma taxa proporcional para a fração do período, ou seja:

$$\boxed{C_n = C(1+i)^n\left(1+\frac{h}{k}i\right)}$$ Solução prática ou linear

Como $\frac{h}{k} < 1$ vem

$$\frac{h}{k}i < i \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{h}{k}i < 1+i \quad \Leftrightarrow \quad 1+\frac{h}{k}i > (1+i)^{\frac{h}{k}}$$

Logo a taxa equivalente é menor que a taxa proporcional e, como tal, a solução exponencial conduz a um valor inferior ao da solução linear.

5. Processos de atualização

Como referido inicialmente, o fator tempo é crucial em qualquer problema de Cálculo Financeiro. O facto de poder ser atribuído ao dinheiro um valor temporal permite, desde logo, perceber porque se revela importante pensar em problemas que pressuponham a troca de um capital com vencimento numa data futura por outro, com vencimento em data anterior. Tal operação financeira designa-se por atualização. Ou seja, a atualização pode ser considerada como o processo inverso da capitalização.

Segundo Saias, Carvalho e Amaral (2004) a atualização só se aplica se o devedor pretende liquidar a sua dívida antes da data acordada ou se o credor necessita do reembolso do capital antes da dada combinada. Como refere Matias (2009), atualizar um capital significa reportar o mesmo a um momento de vencimento anterior; capitalizar um capital significa reportar o mesmo a um momento de vencimento posterior.

De acordo com os princípios enunciados do Cálculo Financeiro, uma operação de atualização é uma operação que torna equivalente um capital com vencimento numa data futura, que designamos por valor nominal e representamos por C_t, e um capital com vencimento numa data anterior, que designamos por valor atual e representamos por C_{t-n}. O espaço de tempo n que medeia entre o momento de vencimento futuro t e o momento de vencimento do valor atual $t–n$, designa-se por diferimento (MATIAS, 2009). Ora, ancorados nos princípios enunciados do Cálculo Financeiro, o valor do capital atual reportado ao momento t-n, será necessariamente inferior ao valor do capital nominal no momento t, uma vez que o capital nominal engloba os juros que seriam produzidos até esse momento. Ou seja, há que descontar estes juros ao capital nominal. Assim sendo, é possível perceber que a antecipação de um capital, com vencimento numa época futura, implique uma diminuição (ou desconto) no mesmo, pelo que as operações de atualização são também denominadas de operações de desconto (QUELHAS et al., 2009).

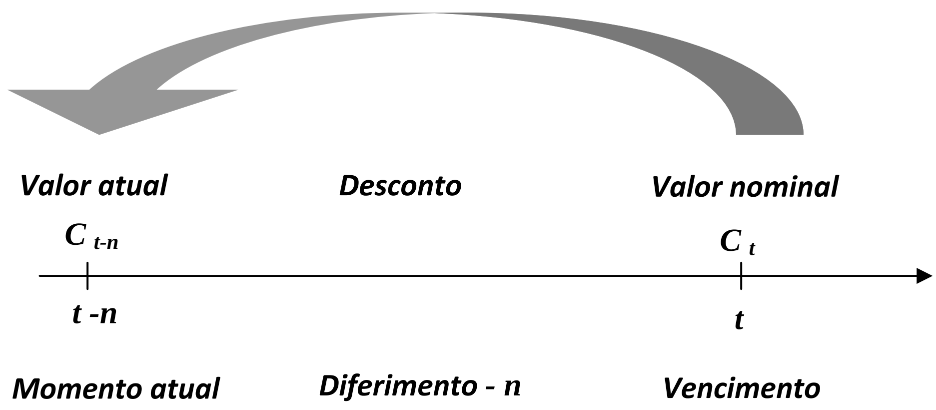
Para calcular o valor do desconto, isto é, para saber qual o valor a deduzir ao valor nominal, será necessário acordar quer a taxa, que será aplicada, quer o regime de atualização a utilizar (à semelhança do que foi referido para as operações de capitalização em que o juro que acresce ao capital inicial depende quer da taxa de juro definida quer do regime de capitalização acordado) (QUELHAS et al., 2009). À semelhança do conceito de juro, também o conceito de desconto pode ser entendido como a quebra que sofre um capital pelo facto de ser antecipado o seu vencimento, ou entendido como o prémio que o titular de um capital diferido se vê obrigado a pagar, para que lhe facultem o seu vencimento antecipado. Sendo C_t o valor nominal de um capital, com vencimento em t, C_{t-n} o valor atual do capital quando falta o tempo n para o seu vencimento, o desconto D sofrido será pois dado por:

$$D = C_t - C_{t\ n}$$

Graficamente podemos visualizar o processo de atualização como se vê no Esquema 8.

Múltiplas são as condições a que se pode subordinar a caraterização de um valor atual. Distinguiremos entre a atualização simples e a composta, cada uma delas com duas modalidades.

Esquema 8 - Processo de atualização.



5.1 Desconto em atualização simples

Nesta modalidade, a de atualização simples, o desconto tem subjacente um regime de capitalização simples. Em regime de juro simples é possível abordar duas formas de calcular o valor do desconto.

5.1.1 *Desconto racional simples (ou desconto por dentro ou desconto simples à taxa de juro)*

O desconto racional simples tem subjacente um processo de capitalização dito simples, mediante o qual o valor atual se converteria no valor nominal (CADILHE et al., 1988). Assim e atendendo às notações apresentadas, se entre o momento atual $(t-n)$ e o momento do vencimento (t) se pressupõe um processo de capitalização simples, à taxa de juro *i*, o valor atual (C_{t-n}) (correspondente a um capital C_t) deve ser tal que:

$$C_{t-n}(1+ni)=C_t \iff \boxed{C_{t-n}=\frac{C_t}{1+ni}}$$ Valor atual do desconto racional simples (n e i referidos à mesma unidade)

Por outro lado, atendendo à definição de desconto $D_{dentro}=C_t-C_{t-n}$, resulta

$$D_{dentro}=C_t-\frac{C_t}{1+ni} \iff D_{dentro}=\frac{\cancel{C_t}+C_t in-\cancel{C_t}}{1+ni} \iff \boxed{D_{dentro}=\frac{C_t ni}{1+ni}}$$

que permite calcular a expressão do desconto racional simples em função do valor nominal sendo o tempo n expresso nas unidades de taxa de juro i. Ou, dito de outra forma:

$$D_{dentro} = \frac{C_t}{1+ni} ni \quad \Leftrightarrow \quad D_{dentro} = C_{t-n} ni$$

Em resumo,

$\boxed{D_{dentro} = C_{t-n} ni}$ Desconto por dentro em função do valor atual sendo o tempo n expresso nas unidades de taxa de juro i

Desta forma, verifica-se que o desconto por dentro corresponde ao juro produzido pelo valor atual do capital, durante o prazo que falta para o seu vencimento, à taxa de juro i.

Alguns autores (SAIAS et al., 2004) criticam esta forma de desconto pelo facto de não entrar em conta com a produção de juros pelos juros vencidos. Para estes autores o único desconto verdadeiramente racional é o desconto em regime de juro composto.

5.1.2 Desconto comercial simples (ou desconto por fora ou desconto simples à taxa de desconto)

O regime de desconto comercial simples também designado por desconto por fora, é aplicado apenas para prazos muito curtos e, tem grande aplicabilidade na atividade bancária. Para o cálculo deste desconto, é introduzido o conceito de taxa de desconto d, definido como o desconto que sofre uma unidade de capital quando se antecipa o seu vencimento de uma unidade de tempo. Assim, o desconto correspondente a um capital C_t, quando se antecipa o seu vencimento do tempo n, e é dado por:

$\boxed{D_{fora} = C_t nd}$ Desconto por fora em função do valor atual sendo o tempo n expresso nas unidades de desconto d

Refira-se que, na sua conceção habitual (conforme referenciado no capítulo inicial) o juro é normal, no sentido de que o mesmo é pago no fim de cada período ou de uma só vez no fim do prazo do empréstimo. Por oposição, diz-se que o juro é antecipado quando é exigido no início de cada período ou de uma só vez, no início do prazo do empréstimo. No caso presente o desconto por fora pode ser pois interpretado como um juro simples, pago antecipadamente, calculado à taxa de juro antecipada, d.

Uma vez que, por definição:

$C_{t-n} = C_t - D_{fora}$, vem $C_{t-n} = C_t - C_t nd$ ou seja $C_{t-n} = C_t(1-nd)$

Desta forma o valor atual do desconto comercial simples é dado por:

$\boxed{C_{t-n} = C_t(1-nd)}$ Valor atual do desconto comercial simples (n e d referidos à mesma unidade)

5.1.3 *Comparação entre a taxa "real" subjacente ao desconto e a taxa enunciada em regime simples*

1) Solução comercial

Conforme foi verificado na solução comercial, a taxa incide sobre o valor nominal, o qual é obviamente superior ao valor atual. Deste modo, numa operação de desconto comercial simples, a taxa efetivamente suportada pelo mutuário é superior à taxa enunciada. Vejamos então qual é a taxa "real" associada ao desconto comercial simples. Ela será a taxa que, aplicada ao capital atual C_{t-n}, permite obter, após o mesmo prazo, no mesmo regime de capitalização (regime de juro simples), o capital nominal C_t, que, será uma taxa que designaremos por d_{CS} - taxa real subjacente ao desconto comercial simples tal que:

$C_{t-n}(1+nd_{cs}) = C_t$ mas como $C_{t-n} = C_t(1-nd)$ vem:

$$C_t(1-nd)(1+nd_{cs}) = C_t$$

$$\Leftrightarrow (1-nd)(1+nd_{cs}) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + nd_{cs}) = \frac{1}{1 - nd}$$

$$\Leftrightarrow nd_{cs} = \frac{1}{1 - nd} - 1$$

$$\Leftrightarrow nd_{cs} = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + nd}{1 - nd}$$

$$\boxed{d_{cs} = \frac{nd}{1 - nd}}$$ Taxa "real" em desconto comercial simples

Note-se que $d_{cs} > d$ logo é superior à taxa anunciada. Note-se ainda que a taxa "real" em desconto comercial simples depende de n, sendo que quanto maior for n, maior é a diferença entre d_{cs} e d. Dito de outro modo, em desconto comercial simples, para cada data focal há uma taxa "real" diferente.

2) Solução racional

Vejamos agora qual é a taxa "real" associada ao desconto racional simples. A taxa será d_{rs} - taxa real subjacente ao desconto racional simples, tal que aplicada ao valor atual, conduza ao capital C_t, após n períodos de capitalização em regime de juro simples. Seja:

$C_{t-n}(1 + nd_{rs}) = C_t$ mas como $C_{t-n} = \frac{C_t}{1 + ni}$ vem:

$$\frac{C_t}{1 + ni}(1 + nd_{rs}) = C_t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + ni}(1 + nd_{rs}) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + nd_{rs}) = (1 + ni)$$

$$\boxed{d_{rs} = i}$$ Taxa "real" em desconto racional simples

Note-se que coincide com a taxa enunciada, o que significa que a equivalência segundo o desconto racional simples é perfeita.

Do exposto anteriormente, verifica-se que do pondo de vista teórico, o desconto racional simples é mais correto que o desconto comercial simples.

5.1.4 *Equivalência entre taxa de juro e de desconto em regime simples*

Neste ponto vamos analisar a relação entre taxa de desconto e taxa de juro, em regime de atualização simples. A relação sustenta-se no conceito de equivalência entre as duas taxas: uma taxa de juro é equivalente a uma taxa de desconto, em atualização simples, se o desconto racional simples calculado à taxa de juro i, e o desconto comercial simples calculado à taxa de desconto d, forem iguais para o mesmo valor nominal e o mesmo diferimento.

Ou seja:

$$i \equiv d \iff D_{dentro} = D_{fora}$$

$$\iff \frac{C_t ni}{1+ni} = C_t nd$$

$$\iff \boxed{d = \frac{i}{1+ni}}$$ Equivalência entre taxa de juro i e taxa de desconto d

(d expresso em função de i)

$$\iff \boxed{i = \frac{d}{1-nd}}$$ Equivalência entre taxa de juro i e taxa de desconto d

(i expressa em função de d)

5.2 Desconto em atualização composta

Atualizar um capital em regime de juro composto não é mais que calcular o seu valor atual, pressupondo que esse valor aplicado à mesma taxa de desconto durante um período de tempo igual ao da antecipação do seu vencimento produziria juros capaz de transformar o seu valor atual no seu valor nominal final. Desta forma, em termos teóricos, o desconto em regime de juro composto coincide com o valor total de juro composto produzido na operação inversa.

Tal como vimos em regime de juro simples, também em regime de juro composto é possível abordar duas formas de atualizar um capital – segundo a solução racional (desconto racional composto) e segundo a solução comercial (desconto comercial composto).

5.2.1 Desconto racional composto (ou desconto em regime de capitalização composta ou desconto composto à taxa de juro)

O desconto racional composto à taxa de juro i é o mais utilizado na prática, pois uma vez que corresponde a um juro composto calculado sobre o valor atualizado, durante o período de tempo n. Assim, para atualizar um capital C basta dividi-lo por $(1+i)^n$ ou multiplica-lo por $(1+i)^{-n}$, que é o chamado fator de atualização de um capital único em regime de juro composto, segundo a solução racional.

De facto, se entre o momento atual $(t-n)$ e o vencimento (t) se pressupõe um processo de capitalização composta, C_t é tal que $C_{t-n}(1+i)^n = C_t$.

Assim:

$\boxed{C_{t-n} = C_t(1+i)^{-n}}$ Valor atual do desconto racional composto

Por outro lado, atendendo à definição de desconto (composto à taxa de juro i, $D_c^{\,i}$)

$$D_c^{\,i} = C_t - C_{t-n} \quad \Leftrightarrow \quad D_c^{\,i} = C_t - C_t(1+i)^{-n}$$

$\boxed{D_c^{\,i} = C_t\left[1-(1-i)^{-n}\right]}$ Valor do desconto racional composto à taxa de juro i

Ora, atendendo a que $C_t = C_{t-n}(1+i)^n$, obtém-se:

$$D_c^{\,i} = C_{t-n}(1+i)^n\left[\ 1-(1+i)^n\ \right]$$

$$\Leftrightarrow D_c^{\,i} = C_{t-n}(1+i)^n - C_{t-n}$$

$$\Leftrightarrow D_c^{\,i} = C_{t-n}\left[\ (1+i)^n - 1\ \right]$$

Ou seja, novamente é possível identificar o desconto composto à taxa de juro como o juro composto do valor atual, durante o tempo n.

5.2.2 Desconto comercial composto (ou desconto bancário ou desconto composto à taxa de desconto)

O desconto comercial composto constitui uma modalidade "académica" ou "teórica" pois não tem utilização na prática. Resulta de um processo cumulativo de sucessivos descontos: para um determinado capital, a sua atualização é efetuada calculando os descontos dos sucessivos períodos e descontando-os sucessivamente ao capital imediatamente anterior. Assim, o primeiro desconto é calculado sobre o capital nominal e descontado a este mesmo capital, obtendo-se o capital atual reportado a um período antes. Seguidamente, calcula-se o desconto sobre o novo capital nominal que é deduzido a este mesmo capital, obtendo-se um novo capital atual, e assim sucessivamente. Sendo a taxa unitária de desconto (ou taxa unitária de juro antecipado), o processo decorre conforme exemplificado na Tabela 2. Vejamos então o que acontece em regime de juro composto segundo a solução comercial:

Tabela 2 - Valor atual do capital em regime de juro composto segundo a solução comercial.

Período	Valor atual comercial composto
1	$C_{t-n-1} = C_t - C_t x 1 x d = C_t(1-d)$
2	$C_{t-n-2} = C_{t-n-1} - C_{t-n-1} x 1 x d = C_{t-n-1}(1-d) = C_t(1-d)(1-d) = C_t(1-d)^2$
3	$C_{t-n-3} = C_{t-n-2} - C_{t-n-2} x 1 x d = C_{t-n-2}(1-d) = C_t(1-d)^2(1-d) = C_t(1-d)^3$
...	...
n	$C_{t-n} = C_t(1-d)^n$

Desta forma, e generalizando para n períodos chegamos ao valor atual do desconto comercial composto:

$\boxed{C_{t-n} = C_t(1-d)^n}$ Valor atual do desconto comercial composto

Assim, para atualizar um capital em regime de juro composto, segundo a solução comercial, basta multiplicá-lo pelo fator $(1-d)^n$, que é o chamado fator de atualização de um capital único em regime de juro composto, segundo a solução comercial.

Sendo o desconto composto à taxa de desconto d, $D_c^{\,d}$, dado por:

$$D_c^{\,d} = C_t - C_{t-n}$$

Vem,

$$D_c^{\,d} = C_t - C_t(1-d)^n$$

$\boxed{D_c^{\,d} = C_t\left[\ 1-(1-d)^n\ \right]}$ Valor do desconto comercial composto à taxa de desconto d

5.2.3 *Comparação entre taxa "real" subjacente ao desconto e a taxa enunciada em regime composto*

1) Solução comercial

Seguindo a metodologia utilizada no desconto em regime de juro simples, vejamos qual a taxa "real" associada ao desconto comercial composto. Ela será uma taxa que designaremos por d_{cc} - taxa real subjacente ao desconto comercial composto, tal que, aplicada ao capital atual resulte no capital C_t, após n períodos de capitalização.

Desta forma:

$C_{t-n}(1+d_{cc})^n = C_t$ mas como $C_{t-n} = C_t(1-d)^n$ então vem:

$$C_t(1-d)^n(1+d_{cc})^n = C_t$$

$$\Leftrightarrow (1-d)^n(1+d_{cc})^n = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-d)(1+d_{cc}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1+d_{cc} = \frac{1}{1-d}$$

$$\Leftrightarrow d_{cc} = \frac{1}{1-d} - 1$$

$$\Leftrightarrow d_{cc} = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + d}{1 - d}$$

$$\boxed{d_{cc} = \frac{d}{1 - d}}$$ Taxa “real” em desconto comercial composto

Note-se que $d_{cc} > d$ logo é superior à taxa anunciada. Note-se ainda que a taxa “real” em desconto comercial composto não depende de n, isto é, a taxa “real” é sempre a mesma independentemente do prazo da operação, contrariamente ao verificado no desconto comercial simples.

2) Solução racional

Vejamos agora qual é a taxa “real” associada ao desconto racional composto. A taxa será d_{rc} - taxa real subjacente ao desconto racional composto, tal que aplicada ao valor atual, conduza ao capital C_t, após n períodos de capitalização em regime de juro composto. Seja:

$C_{t-n}(1 + d_{rc})^n = C_t$ mas como $C_{t-n} = C_t(1 + i)^{-n}$ vem:

$$\cancel{C_t}(1 + i)^{-n}(1 + d_{rc})^n = \cancel{C_t}$$

$$\Leftrightarrow (1 + i)^{-n}(1 + d_{rc})^n = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 + d_{rc})^n = \frac{1}{(1 + i)^{-n}}$$

$$\Leftrightarrow (1 + d_{rc})^n = (1 + i)^n$$

$$\boxed{d_{rc} = i}$$ Taxa “real” em desconto racional composto

Note-se que coincide com a taxa enunciada, o que significa que a equivalência segundo o desconto racional composto é perfeita.

5.3 Equivalência entre taxa de juro e de desconto em regime composto

Neste ponto, tal como foi feito em regime de juro simples, vamos analisar a relação entre taxa de desconto e taxa de juro, em regime de atualização composta.

Ora vejamos:

$$i \equiv d \quad \Leftrightarrow \quad D_{dentro} = D_{fora}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_t\left[\ 1-(1+i)^{-n}\ \right] = C_t\left[\ 1-(1-d)^{n}\ \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{1}-(1+i)^{-n} = \cancel{1}-(1-d)^{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1+i)^{-n}}{(1-d)^{n}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+i)^{-n}(1-d)^{-n} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+i)(1-d) = 1$$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{i = \dfrac{d}{1-d}}$ Equivalência entre taxa de juro i e taxa de desconto d em regime de juro composto (i expresso em função de d)

5.4 Fatores de equivalência em regime de juro simples e em regime de juro composto e taxas "reais"

Tabela 3 - Tabela resumo dos fatores de equivalência e taxas "reais" em RJS e RJC.

<table>
<tr><th></th><th colspan="6">Fatores de equivalência e taxas "reais"</th></tr>
<tr><th></th><th colspan="3">Regime de juro simples</th><th colspan="3">Regime de juro composto</th></tr>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Capitalização</th><th colspan="2">Atualização</th><th rowspan="2">Capitalização</th><th colspan="2">Atualização</th></tr>
<tr><th>Solução comercial</th><th>Solução racional</th><th>Solução comercial</th><th>Solução racional</th></tr>
<tr><th>Fator de equivalência</th><td>$(1+ni)$</td><td>$(1-nd)$</td><td>$1/(1+ni)$</td><td>$(1+i)^n$</td><td>$(1-d)^n$</td><td>$(1+i)^{-n}$</td></tr>
<tr><th>Taxa "real" associada ao desconto</th><td>-------</td><td>$d_{cs}=nd/(1-nd)$</td><td>$d_{rs}=i$</td><td>-------</td><td>$d_{cc}=d/(1-d)$</td><td>$d_{rc}=i$</td></tr>
</table>

De uma forma mais sintetizada, vamos resumir o exposto no processo de capitalização e atualização, relativamente aos fatores de equivalência e às taxas "reais" associado ao desconto, tanto na solução comercial como na solução racional, conforme indicado na Tabela 3.

5.5 Análise crítica das diferentes abordagens de equivalência de capitais

A terminar este capítulo vamos evidenciar a fraqueza do regime de juro simples e a robustez do regime de juro composto.

No regime de juro simples cada data de equivalência é única, dada determinada taxa. Estabelecida a data focal da operação, em regime de juro simples, a substituição dos capitais pode ser efetuada em qualquer momento, desde que aquela data focal não se altere. O mesmo não acontece em regime de juro composto.

Em regime de juro composto, havendo equivalência numa dada data, há equivalência em qualquer outra, dada determinada taxa, ou seja, uma vez estabelecida a equivalência para uma data focal, ela permanece válida para qualquer outra data focal.

Segundo Matias (2009) o regime de juro composto é o regime de eleição do Cálculo Financeiro e o campo de aplicação do regime de juro simples é, sobretudo, o curto prazo e de preferência num contexto de taxas baixas, situações em que as fragilidades são toleráveis. Segundo o mesmo autor, apesar de o regime de juro simples não gozar do princípio da cindibilidade (a equivalência de capitais é independente da data focal), os problemas não são muito significativos pois só se aplica em operações de curto prazo.

6. Equivalência de capitais em regime composto

Neste capítulo será objeto de análise o conceito de equivalência de capitais financeiros. A necessidade de o fazer advém do valor temporal do dinheiro, que obriga a que, para comparar e/ou operar sobre capitais, eles estejam reportados a um mesmo momento. Pela importância prática, já referida, do regime composto, abordaremos somente este regime de capitalização.

6.1 Valor de um conjunto de capitais

O valor de um conjunto de capitais, num dado momento, corresponde à soma dos valores de cada um desses capitais nesse mesmo momento. Uma vez que só é possível operar (somar ou subtrair) sobre capitais financeiros reportados ao mesmo momento do tempo. O primeiro passo para a determinação do valor de um conjunto de capitais financeiros consiste em os reportar, a todos, para o mesmo momento temporal. Para tal, poderá ser necessário:

1) Somar os valores atuais de todos os capitais se o vencimento de todos eles for posterior ao momento de referência;
2) Somar os valores capitalizados de todos os capitais se o vencimento de todos eles for anterior ao momento de referência;
3) Somar os valores capitalizados dos capitais com vencimento anterior ao momento de referência, e somar os valores atuais dos capitais com vencimento posterior ao momento de referência.

Pressupondo um processo implícito de capitalização composta entre o vencimento de cada capital e o vencimento comum, e considerando esta última situação como a situação genérica que engloba as duas primeiras, é possível perceber que a soma financeira de um conjunto de capitais financeiros com vencimentos diversos, $\{(C_r, t_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$ referida ao mesmo vencimento comum *t*, seja dada pela expressão:

$$\left\{\left(\sum_{r=1}^{n} C_r (1+i)^{t-t_r}, t\right)\right\}$$ (QUELHAS et al., 2009).

De facto, dados os conceitos anteriores de capitalização e atualização em regime composto, as situações explicitadas nas alíneas imediatamente acima, são acauteladas:

1) Se todos os capitais financeiros são atualizados, então $t\text{-}t_r < 0$, para qualquer valor de t_r;

2) Se todos os capitais financeiros são capitalizados, então $t\text{-}t_r > 0$, para qualquer valor de t_r;

3) Se alguns capitais financeiros são atualizados e os restantes são capitalizados, então $t\text{-}t_r < 0$, para os primeiros e $t\text{-}t_r > 0$, para os segundos.

A quantia monetária $\sum_{r=1}^{n} C_r (1+i)^{t-t_r}$ denomina-se capital comum do conjunto de capitais financeiros $\{(C_r, t_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$, no vencimento comum, ou seja:

$$V(t) = capital\ comum\ (t) = \sum_{r=1}^{n} C_r (1+i)^{t-t_r}$$

6.2 Vencimento médio

Dado um conjunto de capitais financeiros $\{(C_r, t_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$, define-se vencimento médio desse conjunto de capitais como, o vencimento t no qual o capital comum é igual à soma aritmética das quantias monetárias do conjunto de capitais.

O conjunto de noções que introduzimos neste capítulo, refletem-se, em particular, na problemática das rendas, sendo que este ponto se constitui como um ponto chave em grande número de aplicações financeiras. Desta forma, iniciamos o próximo capítulo com a abordagem teórica deste tema.

CAPÍTULO II – RENDAS FINANCEIRAS

1. Rendas

Abrimos este capítulo com a forma conceptual do conceito que lhe subjaz, avançando depois para conceitos relacionados.

Segundo Canadas (1998) na linguagem comum usamos o termo renda para identificar pagamentos/recebimentos que ocorrem com uma periodicidade certa. É nesse sentido que falamos, por exemplo, em “renda de casa” ou “rendas de um contrato de *leasing*”. O significado técnico do termo rendas é próximo do da sua significação corrente. Por questões que já explicámos, o regime que utilizamos é o regime composto.

1.1 Enquadramento geral e conceitos básicos

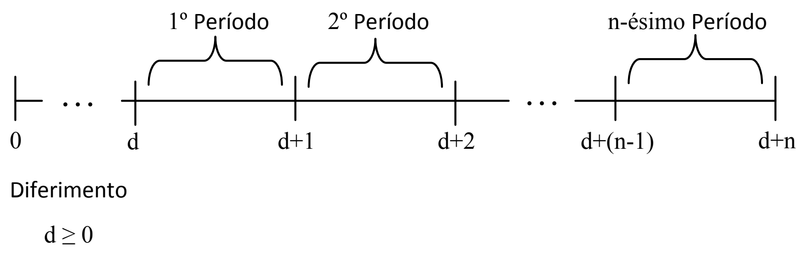
Nos capítulos anteriores estudamos o processo de atualização e capitalização. Imaginemos agora, um conjunto de capitais financeiros a ocorrer a intervalos de tempo iguais. A um conjunto de capitais nestas condições dá-se o nome de renda e cada um desses capitais denomina-se termo da renda. Dito de outro modo, uma renda financeira é um conjunto (finito ou infinito) de capitais financeiros com vencimentos periódicos. Não é pois, obrigatório que os termos da renda sejam constantes. No entanto, é necessário que o intervalo de tempo entre os dois termos subsequentes seja constante para podermos falar em renda em termos financeiros. O intervalo de tempo que medeia entre dois termos consecutivos designa-se por período da renda. Simbolicamente, representamos uma renda financeira por:

$$\{(C_r, t_r)\}_{r=1,2,\ldots,n \text{ ou } r=1,2,\ldots} \text{ tal que } t_{r+1} - t_r = P, \ \forall r .$$

Por outro lado, segundo Cadilhe & Soares (1988), é importante considerar três momentos relevantes na vida de uma renda. O primeiro é o momento de constituição da renda (momento zero). O segundo é o momento que coincide com o início do primeiro período da renda e é usualmente representado por d. Uma renda pode começar a produzir-se imediatamente $(d = 0)$ ou não $(d > 0)$. A este intervalo de tempo, que decorre entre o momento de constituição da renda e o momento em que esta começa a produzir-se, chama-se diferimento da renda d, sendo $d \geq 0$ (MATIAS, 2009). O terceiro momento coincide com o fim do último período da renda. Para uma renda com n termos, será o momento $d+n$.

O Gráfico 2 pretende resumir e simplificar os conceitos anteriores.

Gráfico 2 - Ilustração de conceitos básicos de rendas.



Neste sentido, os cálculos teóricos conducentes à apresentação das fórmulas a utilizar neste capítulo de rendas, são baseados no valor da renda num qualquer momento t, mas particularizados, em especial, para o momento d e para o momento $d+n$. De acordo com a explanação conceptual anterior, o valor de uma renda num determinado momento t, não é mais do que o valor do capital comum nesse vencimento comum t.

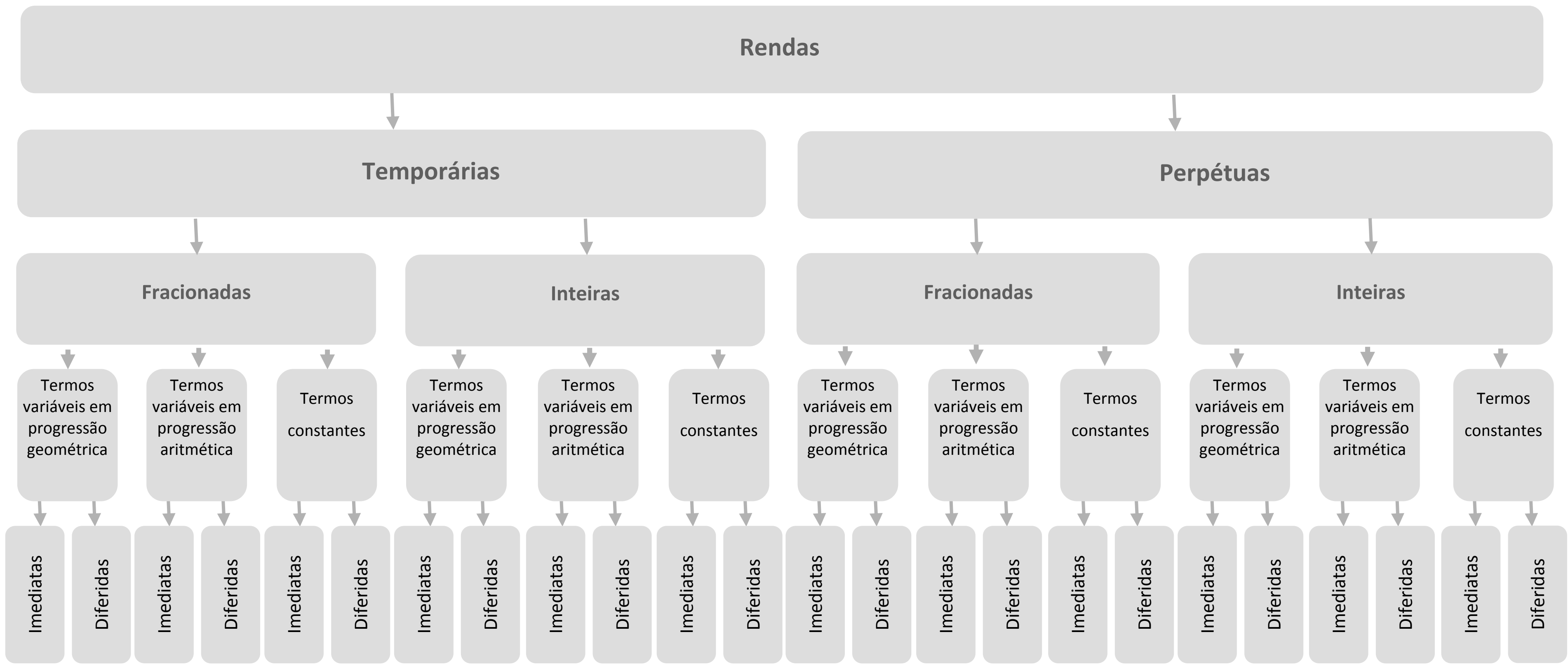
Várias são as situações em que se pode negociar uma renda. Sendo possível classificar as rendas segundo diferentes critérios, referimos aqui os mais utilizados: classificação quanto ao número de termos, quanto ao período da renda, quanto aos períodos da renda e da taxa, quanto ao valor dos seus termos, quanto ao momento de referência, quanto ao vencimento dos termos e quanto à dependência face a fatores aleatórios.

Desta forma podemos considerar, conforme apresentado na Tabela 4 e no Esquema 9, as seguintes rendas principais:

Tabela 4 - Critérios de classificação das rendas (Baseado em Matias, (2009)).

Rendas		
Critérios de classificação	**Designação das rendas**	**Caraterísticas**
Quanto ao número de termos	Renda temporária	O número de termos é limitado
	Renda perpétua	O número de termos é ilimitado
Quanto ao período da renda	Renda anual	O período da renda é o ano
	Renda semestral	O período da renda é o semestre
	…	…
Quanto aos períodos da renda e da taxa	Renda inteira	O período da renda coincide com o período a que está reportada a taxa
	Renda fracionada	O período da renda é diferente do período a que está reportada a taxa
Quanto ao valor dos seus termos	Renda de termos constantes	Os termos são todos do mesmo valor
	Renda de termos variáveis	Os termos são de diferentes valores
Quanto ao diferimento	Renda imediata	O diferimento é nulo $d = 0$
	Renda diferida	O diferimento é positivo $d > 0$
Quanto à localização do vencimento de cada termo	Renda normal	Os termos vencem no final de cada período
	Renda antecipada	Os termos vencem no início de cada período
Quanto à dependência face a fatores aleatórios	Renda certa	Há certeza quanto a todos os elementos da renda
	Renda eventual	Há fatores aleatórios na determinação de um ou mais elementos da renda

Esquema 9 - Principais tipos de rendas.



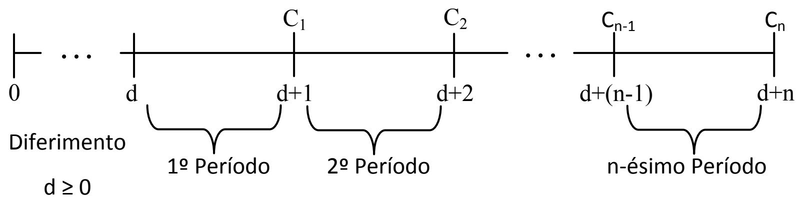
De modo a formalizar e esquematizar, de uma forma mais clara, as notações e os conceitos apresentados, parece-nos importante a introdução de algum simbolismo.

Assim, de acordo com a estrutura conceptual introduzida, uma renda normal (ou antecipada) será simbolicamente representada por:

$$\{(C_r, d + rP)\}_{r=1,2,\ldots,n \quad ou \quad r=1,2,\ldots}$$

Esquematicamente:

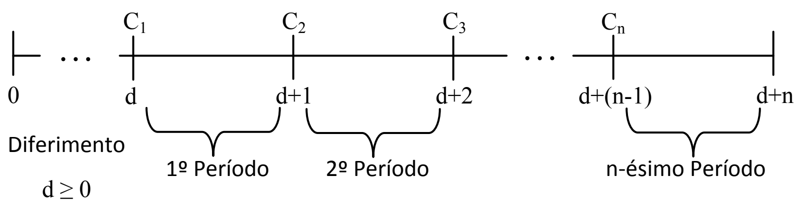
Gráfico 3 - Rendas de termos normais.



Por seu lado, uma renda antecipada será simbolicamente representada por:

$$\{(C_r, d + (r-1)P)\}_{r=1,2,\ldots,n\, ou\, r=1,2,\ldots}$$

Gráfico 4 - Rendas de termos antecipados.



Uma vez que é sempre possível utilizar taxas equivalentes, qualquer renda fracionada pode ser convertida numa renda inteira. Perante uma renda fracionada (discrepância entre o período da renda e o período da taxa) o que temos que fazer é utilizar uma taxa periódica adequada, ou seja, devidamente convertida para o mesmo período da renda, através de uma relação de proporcionalidade ou através de uma relação de equivalência, consoante a taxa de que partimos seja nominal ou efetiva, respetivamente. Assim sendo, a apresentação conceptual que se segue não inclui o caso de rendas fracionadas.

A explicação teórica que se segue pretende ajudar à compreensão dos casos práticos que vamos utilizar. Assim sendo, pese embora a diversidade de situações apresentadas no Esquema 9, apenas abordamos a teoria subjacente à prática que posteriormente se segue.

1.2 Rendas temporárias

1.2.1 Valor de uma renda de termos quaisquer

Seja $\{(C_r, t_r)\}_{r=1,2,\dots,n}$ *tal que* $t_{r+1} - t_r = P, \ \forall\, r$ uma renda temporária. Determinar o valor da renda num momento t é determinar o capital comum nesse vencimento comum, *t*. Admitindo o regime composto à taxa *i*, de período igual ao período da renda, observa-se que:

$$V(t) = \sum_{r=1}^{n} C_r (1+i)^{t-t_r}$$ (CADILHE et al., 1988).

De acordo com os conceitos explanados de capitalização e atualização, observa-se que o valor num dado momento *t* de uma renda de n termos antecipados, com diferimento *d*, é exatamente igual ao valor em *t* de uma renda de *n* termos normais, com o mesmo diferimento, capitalizado de um período da renda.

De facto, no caso de uma renda de n termos normais, com $d \geq 0$, simbolicamente representada por $\{(C_r, d + rP)\}_{r=1,2,\dots,n}$, o valor da renda no instante *t* assume a expressão:

$$V_d(t) = \sum_{r=1}^{n} C_r (1+i)^{t-(d+r)} \, .$$

Se agora considerarmos um renda de *n* termos antecipados com $d \geq 0$, simbolicamente representada por $\{(C_r, d + (r-1)P)\}_{r=1,2,\dots,n}$, o valor da renda no instante *t* assume a expressão $V'_d(t) = \sum_{r=1}^{n} C_r (1+i)^{t-(d+r-1)}$.

Ora:

$$V'_d(t)=\sum_{r=1}^{n}C_r(1+i)^{t-(d+r-1)}$$
$$\Leftrightarrow V'_d(t)=\sum_{r=1}^{n}C_r(1+i)^{t-(d+r)}(1+i)$$
$$\Leftrightarrow V'_d(t)=(1+i)\sum_{r=1}^{n}C_r(1+i)^{t-(d+r)}$$
$$\Leftrightarrow V'_d(t)=(1+i)V_d(t)$$

Ou seja, um simples cálculo de capitalização permite facilmente encontrar o valor de uma renda antecipada a partir do valor de uma renda normal. Deste modo, o nosso estudo concentra-se apenas nas rendas normais.

Dado o nosso interesse particular em apresentar teoria na justa medida da aplicação prática que pretendemos demonstrar, vamos de seguida abordar o caso particular de rendas de termos constantes.

1.2.2 Valor de uma renda de termos normais e constantes

Consideremos a renda normal de termos constantes $\{(C_r, d+rP)\}_{r=1,2,\dots,n}$.

Atendendo à expressão acima apresentada do valor de uma renda de termos quaisquer, num dado instante *t*, particularizada para o caso de termos constantes, obtemos:

$$V_d(t)=\sum_{r=1}^{n}C_r(1+i)^{t-(d+r)}=C_r\sum_{r=1}^{n}(1+i)^{t-(d+r)}=C_r(1+i)^{t-d}\sum_{r=1}^{n}(1+i)^{-r}$$

Ora, uma observação mais atenta, mostra que, $\sum_{r=1}^{n}(1+i)^{-r}$ não é mais do que a soma de *n* termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $(1+i)^{-r}$ e cujo primeiro termo é $(1+i)^{-1}$. Assim uma simples formulação matemática evidencia que:

$$\sum_{r=1}^{n}(1+i)^{-r}=(1+i)^{-1}\frac{1-\left[(1+i)^{-1}\right]^n}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$= (1+i)^{-1} \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}}$$

$$= \frac{1}{1+i} \; \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{\cancel{1}+i-\cancel{1}}{1+i}}$$

$$= \frac{1}{1\cancel{+i}} \; \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{i}{1\cancel{+i}}}$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Donde:

$$V_d(t) = C(1+i)^{\,t-d} \; \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

No entanto, por convenção, é usual utilizar a simbologia:

$$a_{n\neg i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Ou seja:

$\boxed{V_d(t) = C(1+i)^{\,t-d} a_{n\neg i}}$ Valor de uma renda de termos normais e constantes, sendo $d \geq 0$ (diferimento)

Para o caso particular de $t = d$, vem:

$\boxed{V_d(d) = C\, a_{n\neg i}}$ Valor de uma renda de termos normais e constantes, no momento d

Para o caso particular de $t = d+n$, vem:

$$V_d(d+n) = C(1+i)^n a_{n\neg i}$$

$$\Leftrightarrow V_d(d+n) = C(1+i)^n \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\Leftrightarrow V_d(d+n) = C\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

No entanto, por convenção, é usual utilizar a simbologia:

$s_{n\neg i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ ou seja:

$\boxed{V_d(d+n) = C\, s_{n\neg i}}$ Valor de uma renda de termos normais e constantes no momento $d+n$ (valor acumulado da renda)

1.2.3 Valor de uma renda de termos variáveis em progressão geométrica

Consideremos os n termos de uma renda variando em progressão geométrica de razão r, sendo o primeiro termo no valor de C euros:

$$C, Cr, Cr^2, Cr^3, \ldots, Cr^{n-2}, Cr^{n-1}$$

Nestas condições estamos perante uma renda temporária, inteira, imediata, de termos normais variando em progressão geométrica em que o valor acumulado desta renda, que passamos a designar por $V(d+n)$, pode ser representado da seguinte forma:

$$\underbrace{{}_{(g)}V(d+n)}_{\substack{\text{Valor acumulado da renda reportado}\\ \text{ao momento em que}\\ \text{ocorre o último termo}}} = \underbrace{\underbrace{C}_{Mom.1}(1+i)^{n-1}}_{\substack{\text{Valor do 1º termo}\\ \text{capitalizado para o momento } n}} + \underbrace{\underbrace{(Cr)}_{Mom.2}(1+i)^{n-2}}_{\substack{\text{Valor do 2º termo}\\ \text{capitalizado para o momento } n}} + \underbrace{\underbrace{(Cr^2)}_{Mom.3}(1+i)^{n-3}}_{\substack{\text{Valor do 3º termo}\\ \text{capitalizado para o momento } n}} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\underbrace{(Cr^{n-2})}_{Mom.(n-1)}(1+i)}_{\substack{\text{Valor do penúltimo termo}\\ \text{capitalizado para o momento } n}} + \underbrace{(Cr^{n-1})}_{\text{Valor do último termo}}$$

Como a soma dos n termos de uma progressão geométrica de razão r, com o primeiro termo C_1, é dada por $S_{pg} = C_1\dfrac{r^n - 1}{r-1}$ logo, constituindo-se os termos da presente renda, como uma progressão geométrica de razão $r(1+i)^n$ e cujo primeiro termo é $C(1+i)^{n-1}$, vem:

$$ {}_{(g)}V(d+n) = C(1+i)^{n-1}\frac{\left[r(1+i)^{-1}\right]^{n}-1}{r(1+i)^{-1}-1} $$

$$ \Leftrightarrow {}_{(g)}V(d+n) = C(1+i)^{n-1}\frac{\left(\frac{r}{1+i}\right)^{n}-1}{\frac{r}{1+i}-1} $$

$$ \Leftrightarrow {}_{(g)}V(d+n) = C(1+i)^{n-1}\frac{\frac{r^{n}}{(1+i)^{n}}-1}{\frac{r}{1+i}-1} $$

$$ \Leftrightarrow {}_{(g)}V(d+n) = C(1+i)^{n-1}\frac{\frac{r^{n}-(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}}}{\frac{r-(1+i)}{1+i}} $$

$$ \Leftrightarrow {}_{(g)}V(d+n) = C(1+i)^{n-1}\frac{r^{n}-(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}}\frac{1+i}{r-(1+i)} $$

$$ \Leftrightarrow {}_{(g)}V(d+n) = C\frac{r^{n}-(1+i)^{n}}{r-(1+i)}(1+i)^{n-1}\frac{1+i}{(1+i)^{n}} $$

$$ \Leftrightarrow {}_{(g)}V(d+n) = C\frac{r^{n}-(1+i)^{n}}{r-(1+i)}\frac{\cancel{(1+i)}^{n}}{\cancel{(1+i)}^{n}} $$

Finalmente,

$$\boxed{{}_{(g)}V(d+n) = C\frac{r^n - (1+i)^n}{r-(1+i)}}$$

Valor acumulado reportado ao momento em que ocorre o último termo de uma renda temporária, inteira, imediata, com n termos normais variando em progressão geométrica com o 1º termo = C e razão = r

Depois de elaborado o estudo dos conceitos básicos subjacentes ao cálculo financeiro e das rendas financeiras, apresentamos, no capítulo seguinte, a fundamentação das opções metodológicas que presidiram à parte empírica do estudo.

CAPÍTULO III - ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO

1. Metodologia

De acordo com Ghauri (2005) a metodologia de investigação deve ser entendida como um sistema de regras e procedimentos que possibilite a obtenção de conhecimentos através de uma lógica específica. Nesse sentido, o presente capítulo destina-se a apresentar o caminho metodológico utilizado na realização deste trabalho, em conformidade com os objetivos inicialmente definidos.

1.1 O tema de estudo e o objetivo geral

Desde o início do presente trabalho, temos vindo a acentuar a importância da linguagem financeira na vida corrente do cidadão ao lidar, com as instituições financeiras, em assuntos práticos e de interesse pessoal para aquele. Procurando compreender essa mesma linguagem, introduzimos um conjunto de conceitos e analisámos possíveis relações entre eles, culminando esta análise com uma temática de grande interesse prático para a relação cidadão – instituição financeira: rendas financeiras. Por outro lado, nessa relação estabelecida, sente-se cada vez mais premente a necessidade de, para além de uma informação clara e assertiva por parte das instituições, uma informação imediata que permita dar resposta às questões práticas correntes ao cidadão. Nesse diálogo entre este e as primeiras, a existência de simuladores financeiros nos sítios da internet das instituições, revela-se um instrumento de prática corrente e fundamental.

Referenciados pelo quadro apresentado, começámos pela abordagem dos conceitos teóricos subjacentes no cálculo financeiro, capaz de sustentar a aplicação empírica que é feita nos casos práticos analisados. Procurando uma abordagem conceptual consistente dos assuntos envolvidos nos simuladores utilizados, iniciámos a abordagem teórica dos conceitos básicos (juro e processos de capitalização, processos de atualização e equivalência de capitais) através de uma apresentação lógica e encadeada dos mesmos, de forma a sermos conduzidos à temática das rendas financeiras. Neste ponto gostaríamos de salientar que, embora algum desenvolvimento abstrato associado a conceitos como processos de capitalização e atualização, não tenham tido uma aplicação prática direta nos simuladores utilizados, os mesmos são de grande importância no desenvolvimento teórico-conceptual das rendas financeiras.

Assim, e ajustados pela problemática apresentada, definimos como objetivo geral do presente trabalho, demonstrar como os conceitos teóricos de cálculo financeiro se relacionam com a informação apresentada nos simuladores disponíveis nas páginas da internet dos produtos financeiros associados a rendas, oferecidos por diferentes instituições bancárias.

No entanto, quer pela complexidade que subjaz a um trabalho de investigação deste tipo, quer pela gestão temporal e de recursos que é necessária ao desenvolvimento do mesmo, tornaram um objetivo demasiado ambicioso. Assim sendo, usámos como instrumentos de trabalho quatro estudos de caso associados a diferentes enquadramentos empíricos.

As razões que determinaram esta escolha assentam, essencialmente, com o facto de pretendermos diferentes produtos financeiros capazes de traduzirem a realidade diversificada com que o cidadão comum se depara na sua relação com as instituições bancárias. Por outro lado, consideramos igualmente importante escolher diferentes instituições e diferentes abordagens de oferta. E é precisamente nas diferentes ofertas financeiras e na sua relação com os conceitos teóricos apresentados, que a nossa análise se inspira.

Uma vez explicitado o tema de estudo, bem como o objetivo geral, interessa-nos agora explanar as questões e as hipóteses da investigação que sustentam todo o trabalho desenvolvido.

1.2 As questões e as hipóteses de investigação

Neste ponto do capítulo, procuramos alicerçar as opções metodológicas adotadas no presente estudo. Assim, baseados no tema e no objetivo geral construído, expomos, de seguida, as questões e as hipóteses de investigação, bem como a estratégia metodológica utilizada.

Como temos vindo a sublinhar, a informação financeira disponibilizada nos sítios da internet das diferentes instituições é suportada por um conjunto de conceitos teóricos, amplamente sustentados pelos diversos autores em que apoiámos o nosso trabalho. Admitindo que, conforme refere Canadas (1998), num cenário como o atual, o custo da informação é cada vez menor e, paradoxalmente, o custo do saber é cada vez maior, interessa-nos explorar esta tese. Assim, questionamo-nos sobre se é possível desmistificar a designação "cálculo financeiro" e transpô-la dos manuais da área para o dia a dia, partindo de ferramentas que ajudem a resolver problemas concretos da relação entre as instituições financeiras e os seus clientes.

Por outro lado, a quantidade de informação pública disponibilizada ao consumidor pelas diferentes instituições financeiras, conduz-nos à interrogação de perceber se a mesma se revela transparente na forma como é apresenta.

Aportados nas considerações apresentadas e no quadro teórico – conceptual desenvolvido, as questões de investigação formuladas deram origem a hipóteses de trabalho que se julgam pertinentes:

Hipótese 1: a informação pública disponibilizada ao consumidor pelas diferentes instituições financeiras, pode ser transposta dos manuais da área para a relação factual entre as instituições financeiras e os seus clientes.

Hipótese 2: a informação pública disponibilizada ao consumidor pelas diferentes instituições financeiras, revela-se transparente na forma como se apresenta.

Uma vez enunciadas as questões e as hipóteses que enformam o presente trabalho, as eventuais respostas às primeiras e a análise das segundas, induzem-nos a formular um conjunto de suposições mais particularizadas. Assim, o objetivo específico da nossa investigação, reside em perceber se se torna possível validar a informação financeira disponibilizada nos simuladores das instituições bancárias, quer ao nível da teoria que a suporta, quer ao nível da transparência com que se apresenta.

Com base no nosso quadro conceptual e nas questões e hipóteses de investigação, interessa-nos agora, em termos específicos, caracterizar o processo investigativo.

1.3 A estratégia metodológica da investigação

Conforme referem Almeida (2003) ou Pardal (1995), o método científico integra não só a teoria que suporta a investigação, mas também os factos que a materializam. Ou seja, e tal como referido pelos mesmos autores, os conhecimentos que um qualquer estudo científico determina, resultam quer da teoria, entendida no sentido amplo do termo, quer das condições que deram origem a esta produção.

Assim, com o propósito de objetivar os elementos a que a investigação nos conduziu, procuramos de seguida informar da estratégia metodológica da mesma, incidindo sobre as condições e as opções em que decorreu o trabalho empírico.

No presente trabalho assumimos uma componente descritiva (pretendemos descrever uma situação e acumular conhecimentos passíveis de serem utilizados em futuras situações), uma componente avaliativa (pretendemos analisar uma situação) e uma componente de desenvolvimento (pretendemos utilizar os conhecimentos sobre uma situação para verificar se a mesma está implementada de acordo com as expetativas dos vários parceiros envolvidos).

Apresentando-se o presente trabalho sob a forma de estudos de caso, parece-nos importante destacar os seus vários aspetos.

Tal como definido por Yin (2009) o estudo de caso consiste numa análise empírica que investiga um fenómeno contemporâneo do investigador, no seu contexto. Referido por Almeida e Pinto (2003) como um método de análise intensiva, o estudo de caso revê-se numa análise ampla e detalhada do caso a tratar. Simultaneamente, a profundidade de que um estudo de caso se reveste traduz-se tanto no quadro teórico de referência ou nas especificidades da situação em análise, como na heterogeneidade do material que o informa (PARDAL et al., 1995).

A oportunidade de um aprofundamento intenso de um fenómeno (caso), permite, mais do que uma mera descrição do mesmo, perceber a interação entre os fatores envolvidos obtida através de uma recolha sistemática dos dados (BELL, 2010).

Desta forma, ao considerar-se o método de estudo de caso como um tipo de investigação inclusiva, a sua conceção requer uma atenção especial no que se refere às técnicas de recolha e tratamento de dados.

1.4 Planeamento e análise do caso de estudo

Com base nas questões de investigação inicialmente apresentadas e nas hipóteses de investigação formuladas, traçou-se o ponto de partida para a planificação do estudo de caso que sustenta a recolha de informação empírica e posterior tratamento da mesma. Como ponto prévio a todo o trabalho, refira-se a atenção dada aos elementos referenciados por diversos autores (e.g.YIN, 2009) como passíveis de serem considerados elementos de desvantagem do método de estudo de caso: tempo, rigor e representatividade. Se quanto ao tempo, se procurou a utilização de elementos facilmente obtidos através de simuladores financeiros disponíveis no sítio da internet das instituições que suportam a parte empírica, quanto ao rigor procurou-se sempre a correção que é exigida num trabalho investigativo a este nível. Finalmente, quanto à representatividade, interessou-nos reter uma amostra heterogénea de instituições financeiras que conjugassem, em simultâneo, o acesso à informação mais relevante face à aplicação dos conceitos teóricos que pretendíamos, e a sua relevância no mercado português. Importa aqui referir a forma de seleção da amostra utilizada no presente estudo. Com base numa primeira listagem dos bancos a operar em Portugal, fomos conduzidos a um conjunto bastante extenso de entidades, incomportável com uma análise empírica a introduzir num estudo deste tipo (ACABEM, 2011). Não pretendendo este estudo revelar-se exaustivo ao nível da apreciação que pode ser feita da informação disponível nos simuladores das entidades financeiras disponíveis nos sítios da internet, fomos orientados tão somente pela ideia de obter um conjunto diversificado de instituições capazes de permitirem dar orientações de resposta às questões de investigação anteriormente formuladas.

Assim sendo, uma seleção possível tomou por base uma amostra de quatro instituições financeiras, nomeadamente o BES, BPI, BANIF (Banco Internacional do Funchal) e o Montepio associadas a cinco produtos financeiros: crédito habitação, crédito pessoal, *leasing*, plano poupança, obrigações interbolsa, capital garantido e novo aforro familiar. Ao produto financeiro crédito habitação foi simulado a entrega de uma prestação mensal constante em quatro moldes diferentes: postecipadas, postecipadas com período de carência, postecipadas com valor residual e postecipadas com valor residual e adiantamento. As instituições financeiras analisadas foram: BPI, BANIF e BES. Seguidamente analisamos o produto financeiro crédito pessoal, onde foi simulado uma utilização do crédito por tranches com carência de capital e com carência de capital e valor residual.

Tabela 5 - Simulação efetuada ao produto financeiro crédito habitação.

CRÉDITO HABITAÇÃO

BPI

Prestações mensais constantes e postecipadas				
TAN	**Spread**	**Indexante**	**D0**	**n**
4,692%	3,675%[1]	1,017%	90.000,00 €	30 anos
http://www.bancobpi.pt/pagina.asp?a=1&f=79&opt=f&p=1&s=1 consultado a 28/2/11				

Prestações mensais constantes e postecipadas com periodo de carência					
TAN	**Spread**	**Indexante**	**D0**	**n**	**Periodo carência de capital**
4,162%	3,075%[2]	1,087%	51.000,00 €	30 anos	2 anos
http://www.bancobpi.pt/pagina.asp?a=1&f=79&opt=f&p=1&s=1consultado a 28/2/11					

BANIF

Prestações mensais constantes e postecipadas com valor residual							
TAN	**Spread**	**TAE**	**TAER**	**Indexante**	**D0**	**n**	**Valor residual**
3,937%	2,85%	4,697%	4,697%	1,087%	80.000,00 €	30 anos	10%
http://www.banif.pt/xsite/Particulares/Credito/SimuladorCreditoHabitacao.jsp?CH=3838 consultado a 28/2/11							

BES

Prestações mensais constantes e postecipadas com valor residual e adiantamento						
TAN	**Spread**	**Indexante**	**D0**	**n**	**Valor residual**	**Adiantamento**
3,537%	2,45%	Indexante a 3 meses [3]	100.000,00 €	30 anos	10%	10.000,00 €
http://bes-sec.bes.pt/simulacoes/stsimbes/ch/default.asp consultado a 1/3/11						

[1] Inclui prémio proteção ao crédito de 0,175% nos primeiros 5 anos
[2] Inclui prémio proteção ao crédito de 0,175% nos primeiros 5 anos
[3] A taxa de juro aplicável ao empréstimo será revista com a periodicidade 3 meses e corresponderá à Euribor de referência acrescida de 2,45 % .
A Euribor de referência é calculada todos os meses e corresponde à média aritmética simples das cotações diárias das taxas Euribor a 3 meses do mês anterior ao período de contagem de juros, com arredondamento à milésima, calculada numa base de 360 dias.

As instituições financeiras estudadas, na aplicação deste produto financeiro, foram o BANIF e o BES. Ao produto financeiro *leasing* foi simulado a entrega de prestações constantes antecipadas com valor residual e com entrega inicial.

Tabela 6 - Simulação efetuada ao produto financeiro crédito pessoal

CRÉDITO PESSOAL

BANIF — Utilização de crédito por tranches com carência de capital

TAN	Spread	Indexante	D0	Periodo carência de capital	n
4,087%	3%	1,087%	10.000,00 €	1 ano	4 anos

http://www.banif.pt/xsite/Particulares/Credito/SimuladorCreditoPessoal.jsp?CH=4932&PCH=4928 consultado a 1/3/11

BES — Utilização de crédito com carência de capital e valor residual

TAN	Spread	Valor residual	Periodo carência de capital	D0	n	TAEG	Premio de Seguro	Imposto de selo sobre a utilização de crédito	Imposto de selo sobre os juros	Imposto de selo sobre as comissões
16%	Sem infor.	10%	6 meses	10.000,00 €	4 anos	18,5%	453,27 €	94,93 €	4%	4%

http://bes-sec.bes.pt/simulacoes/stnsimbes/mcp.aspx?SV=23 consultado a 1/3/11

Tabela 7 - Simulação efetuada ao produto financeiro *leasing*

LEASING

BANIF — Prestações constantes e antecipadas com valor residual

TAN	TAE	Valor residual	D0	Comissão de abertura do processo	n
pode ser calculada	pode ser calculada	6%	25.000,00 €	175,00 €	4 anos

http://www.banif.pt/xsite/Particulares/Simuladores/SimuladorLeasing.jsp?CH=4097 consultado a 3/3/11

MONTEPIO — Prestações constantes com entrada inicial

TAN	Entrada inicial	Spread	Indexante	D0	n	TAEG	PPCI [1]	Taxa de imposto	Imposto de selo sobre a utilização de crédito	Comissão de contratação
7,39%	20%	6,3%	Euribor a 3 meses de 1,09%	25.000,00 €	4 anos	9,34%	209,68 €	4%	184,48 €	104,00 €

http://www.montepio.pt/ePortal/v10/PT/jsp/oferta/credito/creditoauto.jsp# consultado a 3/3/2011

[1] Plano de Protecção ao Crédito Individual

Tabela 8 - Simulação efetuada ao produto financeiro plano poupança

PLANO POUPANÇA

MONTEPIO — Plano poupança reforma com capital investido inicialmente

TRMA [1]	TIMA [2]	TACS [3]	TACP [4]	n	Complemento mensal	Prazo de recebimento	Capital investido mensalmente	Capital investido inicialmente
4%	2,5%	3,5%	3.5%	28 anos	894,00 €	10 anos	15,00 €	25.000,00 €

http://www.montepio.pt/ePortal/v10/PT/jsp/oferta/PouparInvestir/SolucoesReforma.jsp# consultado a 10/3/2011

BPI — Plano poupança reforma com capital investido inicialmente

TRMA [1]	TIMA [2]	TACS [3]	TACP [4]	n	Complemento mensal	Prazo de recebimento	Capital investido mensalmente	Capital investido inicialmente
4%	2,0%	Sem infor. [5]	Sem infor. [5]	15 anos	Não se aplica	15 anos	75,00 €	0,00 €

http://www.bpiinvestimentos.pt/Simuladores/SimuladorPPRE.asp?sim=Reforma

[1] Taxa rendibilidade média anual
[2] Taxa de inflação média anual
[3] Taxa anual de crescimento salarial

Tabela 9 - Simulação efetuada ao produto financeiro obrigações

	OBRIGAÇÕES										
BPI	Obrigações interbolsa de taxa fixa										
	Moeda de denominação do empréstimo	Valor nominal	Preço de subscrição	Realização	Data de emissão	Data de liquídação	Prazo de empréstimo	Base de cálculo de juros	Pagamento de juros[1]	TRE[2]	TJNB[3]
	€	1.000,00 €	Ao par	Pressuposto pagamento integral na data de emissão	15-03-2011	17-03-2013	2 anos	30/360	Semestralmente e postecipado	3.24%	4.05%
	http://www.bpiinvestimentos.pt/Obrigaçoes/RendimentoFixo/rendimentofixo_emissoes2009.asp consultado a 9/03/2011										

Tabela 10 - Simulação efetuada ao produto financeiro capital garantido

	CAPITAL GARANTIDO					
BES	Capital garantido					
	Prazo	Periodicidade	Investimento Periódico	Entrega inicial	TRA[1]	Capital acumulado
	20 anos	Mensal	50,00 €	250,00 €	2%	14.880,75 €
	http://www.bes.pt/sitebes/cms.aspx?plg=087FFC2D-E3E9-4B2C-A419-42404011BE55					

[1] Taxa de rentabilidade anual

Tabela 11 - Simulação efetuada ao produto financeiro novo aforro familiar

	NOVO AFORRO FAMILIAR				
BPI	Novo aforrro familiar				
	RA[1]	RE[2]	Capital investido inicialmente	Valor investido no final do prazo	Ganho no periodo selecionado
	2%	1,37%	50.000,00 €	50.685,54 €	685,54 €
	http://www.bpiinvestimentos.pt/Simuladores/SimuladorSegurosCapitalizacao.asp?sim=				

[1] Rentabilidade anualizada

[2] Rentabilidade efetiva

As instituições financeiras analisadas foram o BANIF e o Montepio. Da mesma forma, foi feita uma simulação nas instituições financeiras Montepio e BPI ao produto financeiro plano poupança com capital investido inicialmente. Elaborou-se ainda, uma simulação na instituição financeira BPI ao produto obrigações Interbolsa de taxa fixa. A mesma abordagem foi executada ao produto capital garantido no BES. Por último foi feita uma simulação na instituição financeira BPI o produto novo aforro familiar.

De forma a sintetizarmos toda a informação foram elaboradas várias tabelas.

Os dados apresentados nas tabelas acima referenciadas, permitem-nos verificar que na instituição financeira BES, em particular no produto financeiro crédito pessoal, não existe informação relativamente ao *spread* aplicado. Assim como, na instituição financeira BANIF, no produto *leasing* não existe informação explícita relativamente à TAN e TAE. Desta forma, estes produtos foram excluídos para o estudo pretendido.

O produto financeiro obrigações não foi considerado para o estudo prático porque seria necessária abordar os conceitos teóricos subjacentes a empréstimos obrigacionistas para poder sustentar a aplicação prática. O mesmo aconteceu com o produto financeiro crédito habitação, pois para elaborar o seu estudo seria necessário explanar os conceitos de amortização de empréstimos – sistema francês. No entanto, consideramos que teria todo o interesse a abordagem destes temas numa continuação futura deste trabalho, para desta forma completar a panóplia de casos práticos estudados.

Neste seguimento, e após uma análise pormenorizada a toda a informação financeira disponibilizada pelas instituições financeira estudadas nos produtos observados, foram tomadas opções quanto à recolha e tratamento dos dados.

Desta forma, considerou-se que a informação mais relevante para este estudo e que permite diversificar a aplicação prática a estudar e envolver diferentes instituições financeiras, foi apresentada pelos seguintes bancos: BES, BPI e Montepio nos produtos financeiros novo aforro familiar, plano poupança, capital garantido.

Iremos, de seguida, abordar o estudo prático nestas três instituições bancárias – BES, BPI e Montepio, aplicado aos produtos financeiros: novo aforro familiar, plano poupança reforma, capital garantido e plano poupança complementar.

Ao longo deste capítulo, analisámos e especificamos os objetivos do trabalho, identificamos as questões de investigação que foram levantadas pelo enquadramento teórico do estudo, e procurámos tornar clara a organização metodológica da investigação.

No capítulo que se segue iremos trabalhar os estudos de caso que enformam a parte empírica deste trabalho.

CAPÍTULO IV - ESTUDOS DE CASO

1. Exercícios - Casos reais

Ao longo dos capítulos anteriores centrámos o nosso trabalho na concetualização teórica referenciada para o tema em estudo, bem como na caraterização metodológica deste.

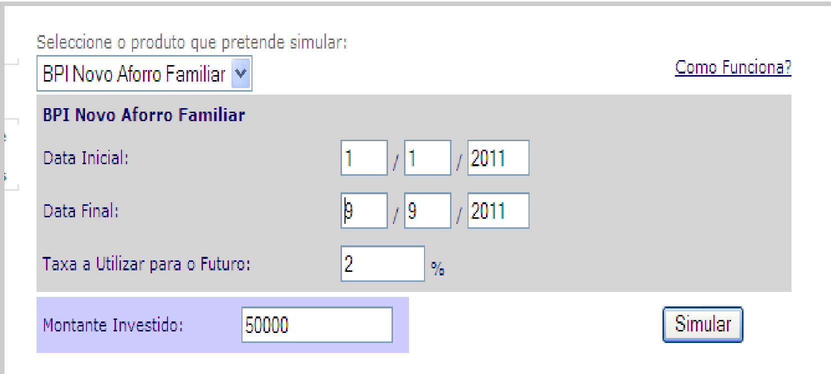
No capítulo que agora se inicia, apresentamos os estudos de caso selecionados para dar corpo à parte empírica do trabalho. Para cada um dos casos reais, iniciamos com a apresentação do banco e produto financeiro a analisar, bem como pela apresentação dos conceitos teóricos subjacentes mais relevantes para a explicação do caso. Seguidamente, é feita a transcrição da informação retirada do simulador disponibilizado no sítio da internet.

O estudo prolonga-se com a definição do objetivo que se pretende concretizar com o caso em questão, bem como com a descrição pormenorizada do mesmo. Por fim é apresentada a resolução do caso, à luz dos conceitos teóricos revistos em sede de estado da arte, dando cumprimento ao objetivo anteriormente definido. Neste ponto pretendemos fazer um estudo pormenorizado dos produtos, oferecidos nos respetivos sítios, novo aforro apresentado pelo BPI, plano poupança reforma apresentado pelo BPI, capital garantido apresentado pelo BES e poupança complementar apresentado pelo Montepio Geral, e demonstrar os princípios teóricos subjacentes nos produtos e simuladores destas instituições financeiras.

1.1 *Caso real 1 - Estudo pormenorizado do produto novo aforro familiar apresentado pelo banco BPI.*

Banco	Produto	Conceitos teóricos subjacentes mais relevantes
BPI	BPI Novo Aforro Familiar	Regime de juro composto; Bases de Cálculo; Conversão de taxas
Extraído e adaptado de: http://www.bpiinvestimentos.pt/Simuladores/SimuladorSegurosCapitalizacao.asp?sim=		

Informação extraída



Montante Investido em 1/1/2011	€50.000,00
Valor do Investimento em 9/9/2011	€50.685,54
Ganho no Período Seleccionado	€685,54
Rentabilidade Efectiva	1,37%
Rentabilidade Anualizada	2,00%

Figura 1 – Informação extraída: *BPI novo aforro familiar.*

Informação ao cliente

10. Taxa de Rendimento do Fundo

10.1 No final de cada exercício é apurada, para cada Fundo, uma taxa de rendimento (r) que se obtém igualando o rendimento do Fundo à seguinte expressão:

$r \times CI_f + [\sum CF_d \times (1 + r) \wedge [(365 - d) / 365] - \sum CF_d]$

CI_f - Conta de Investimento no fim do ano anterior.

CF_d - Entregas liquidas de encargos (sinal positivo) e resgates (sinal negativo) efectuados durante o ano.

d - Número de dias decorridos desde o início do ano, para cada entrega e resgate.

Figura 2 – Informação ao cliente: *BPI novo aforro familiar.*

Objetivo

Confirmar os seguintes valores devolvidos pelo simulador: rendibilidade efetiva 1,37% e rendibilidade anualizada 2,00%.

Descrição da situação

No dia 1 de Janeiro de 2011 foi investida a quantia de 50.000,00 euros neste produto. De acordo com a simulação efetuada, no dia 9 de Setembro o valor deste investimento ascendia a 50.685,54 euros, o que representa, também de acordo com o simulador, uma rendibilidade efetiva de 1,37% e anualizada de 2,00%. Analisando o ponto 10.1 da "Informação ao cliente" podemos concluir que, por um lado vigora o regime de juro composto e, por outro, a base de cálculo utilizada é a base ACT/365 (conforme apresentado no capítulo I, ponto 2 na Tabela 1). Esta base de cálculo em numerador contabiliza os dias reais entre as duas datas, tendo em consideração a exigência de anos bissextos e em denominador considera 365 dias, mesmo tratando-se de anos bissextos), uma vez que a expressão referida para base de cálculo é $\sum CF_d (1+r)^{\frac{365-d}{365}}$. Conforme é apresentado no capítulo II no ponto 1.2.1, podemos verificar que a expressão $\sum CF_d (1+r)^{\frac{365-d}{365}}$ não é mais do que o capital comum $V(t)=\sum_{r=1}^{n} C_r (1+i)^{t-t_r}$ do conjunto de capitais financeiros $\{(C_r, t_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$ no vencimento comum *t*, uma vez adaptadas as notações. No caso presente, há que considerar apenas o capital financeiro (50.000,00 euros, 1 Jan 2011) e reportá-lo à data de 9 de Setembro de 2011.

Resolução

1. Dados relevantes

- Capital investido: 50.000,00 euros
- Período para contagem de juros: entre 1 de Janeiro de 2011 a 9 de Setembro de 2011
- Base de cálculo =ACT/365
- Regime de juro composto

- Capital acumulado: 50.685,54 euros

2. Fundamentos teóricos subjacentes

- Regime de juro composto, no qual o capital acumulado é $C_n = C_0(1+i)^n$ (n e i expressos na mesma unidade de tempo)
- Base de cálculo para contagem de prazos. Neste caso é utilizada a base ACT/365, ou seja, contam-se os dias exatos entre a data inicial e a data final, não se considerando os anos bissextos

3. Cálculos para verificação do valor indicado na simulação

Comecemos por ver quantos dias são considerados, para efeitos de cálculo dos juros:

Contagem dos dias (base ACT/365):

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho	Julho	Agosto	Setembro	Total
31	28	31	30	31	30	31	31	9	**252**

Deste modo teremos:

$C_0 = 50.000,00$

$n = 252$ dias

$C = 50.685,54$

Quanto à rentabilidade anualizada, ela será i tal que:

$$C = C_0(1+i)^n \quad \Leftrightarrow \quad 50.685,54 = 50.000,00(1+i)^{252/365}$$

$$1,013711 = (1+i)^{252/365} \quad \Leftrightarrow \quad 1,013711^{365/252} = (1+i) \quad \Leftrightarrow \quad i = 0,01992$$

Ou seja, aproximadamente $i = 2,00\%$.

Para o cálculo da rendibilidade efetiva, temos que considerar a taxa de período 252 dias equivalentes à taxa anual i = 0,01992, na base de cálculo ACT/365. Conforme foi exposto no capítulo I no ponto 3.1.2, temos que utilizar a relação de equivalência entre taxas efetivas em RCC $(1+i) = (1+i_k)^k$.

Os cálculos a efetuar são os seguintes:

Para i = 0,01992 taxa unitária de período 1 ano = 365 dias

$i_{\frac{365}{252}}$ será a taxa de período $\left(\frac{1}{365/252}\right)365$ da unidade , logo:

$$1+0{,}01992=\left(1+i_{\frac{365}{252}}\right)^{\frac{365}{252}}$$

$$\Leftrightarrow 1{,}01992=\left(1+i_{\frac{365}{252}}\right)^{\frac{365}{252}}$$

$$\Leftrightarrow (1{,}01992)^{\frac{252}{365}}=1+i_{\frac{365}{252}}$$

$$\Leftrightarrow i_{\frac{365}{252}}=(1{,}01992)^{\frac{252}{365}}-1$$

$\Leftrightarrow i_{\frac{365}{252}}=0{,}013711$ ou seja, aproximadamente $1{,}37\%$.

Conclui-se então, que a rendibilidade efetiva é aproximadamente 1,37% e a rendibilidade anualizada é aproximadamente 2,00%, conforme indica o simulador.

1.2 Caso real 2 - Estudo pormenorizado do produto plano poupança reforma apresentado pelo banco BPI.

Banco	Produto	Conceitos teóricos subjacentes mais relevantes
BPI	Plano Poupança Reforma	Rendas de termos constantes; conversão de taxas
Extraído e adaptado de: http://www.bpiinvestimentos.pt/Simuladores/SimuladorPPRE.asp?sim=Reforma		

Informação extraída

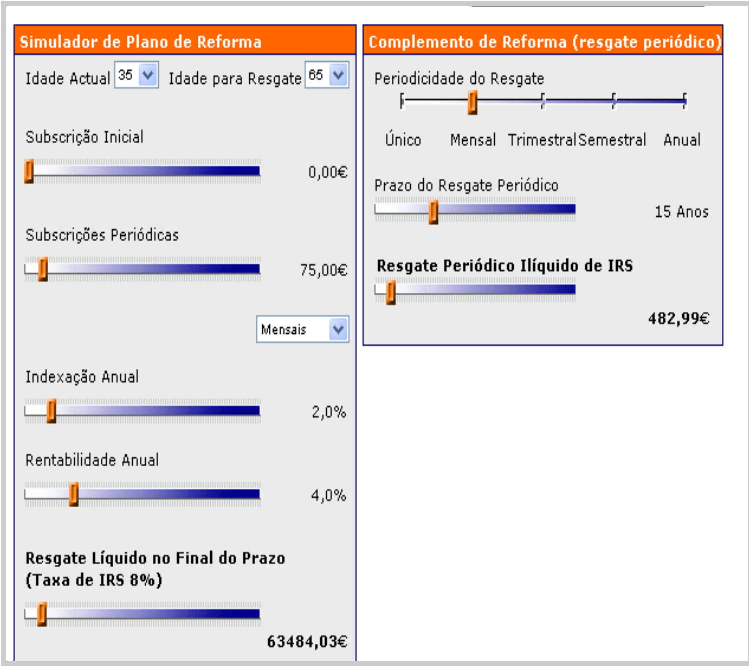


Figura 3- Informação extraída: *BPI plano poupança reforma.*

Informação ao cliente

Como funciona esta Simulação

Este simulador permite-lhe estimar qual o valor que será capitalizado no seu Plano Poupança Reforma considerando as subscrições indicadas e a estimativa da taxa de rentabilidade. Para obter uma boa utilização deste simulador siga as seguintes instruções:

1 - Introduza a sua Idade Actual e Idade para Resgate (esta última pressupõe mais de 60 anos de idade e que o PPR tem mais de 5 anos);

2 - Escolha um valor de Subscrição Inicial para investir num PPR ou indique um valor para Subscrições Periódicas.
Indique se estas deverão ser Mensais, Trimestrais, Semestrais ou Anuais assinalando a sua preferência. (Nota o simulador considera estas entregas feitas no início do período indicado);

3 - Indexação Anual: Escolher uma indexação anual ao plano periódico seleccionado, isto significa que o valor das entregas periódicas será actualizado anualmente de acordo com a taxa seleccionada. Por exemplo: Se o Plano iniciar em 2009 com uma entrega de 50€/mês e seleccionar uma indexação anual de 2% do valor da entrega, isto significa que em 2010 o valor da poupança mensal será € 51. Desta forma procura garantir-se que o valor da poupança não fica desactualizado face à inflação e ao longo dos anos.

4 - Indique a Estimativa de Rentabilidade Anual Ilíquida de Imposto ao longo do plano. Deverá definir, a rentabilidade média anual que espera vir a obter no fundo PPR, pelo período de investimento. O simulador tem como pressuposto que a rentabilidade indicada já é líquida das comissões suportadas pelo PPR. Ao escolher a rentabilidade deve-se ter em atenção que se está meramente perante um simulador e que quaisquer valores de rentabilidade divulgados pela entidade gestora destes Fundos, representam dados do passado, não constituindo os mesmos, garantia de rentabilidade para o futuro.

Ao estimar a rentabilidade deverá ter em conta que:

- Esta deverá ser uma média das rentabilidades anuais durante o prazo indicado (poderá haver anos com rentabilidades de 15% outros de 2%);
- Será prudente ter em conta que o valor da rentabilidade estimada para o fundo está relacionado com o valor estimado nesse prazo para a inflação média. Diferenciais entre a inflação e a rentabilidade muito grandes podem gerar resultados errados.

5 - Depois de introduzir estes dados carregue no botão Simulação;

Figura 4 – Informação ao cliente: *BPI plano poupança reforma.*

Objetivo

Confirmar o valor devolvido pelo simulador do resgate líquido no final do prazo (63.484,03 euros) e o resgate periódico ilíquido de IRS (482,99 euros), durante 15 anos, se no final do prazo optar por essa forma de reembolso.

Descrição da situação

Este simulador consiste em aplicar uma poupança a longo prazo com as seguintes caraterísticas:

- Uma pessoa inicia um plano de reforma poupança aos 35 anos, entregando mensalmente a quantia de 75,00 euros, com o objetivo de receber um valor acumulado no final desse prazo (65 anos). As entregas são mensais e constantes dentro de cada ano, no entanto são acrescidas de 2,00% de um ano para o seguinte. As entregas são efetuadas no início de cada mês, ou seja antecipadas (informação ao cliente Nota 2). Nada sendo dito em contrário, admitem-se rendas imediatas *(d=0)*.
- É admitida uma taxa anual bruta ilíquida média de 4,00% (podendo haver anos com rentabilidade de 15,00% e outros de 2,00%, (informação ao cliente Nota 4)). Parece legítimo admitir que se trata de uma taxa efetiva.

Resolução

1. Dados relevantes
   - Capital investido mensalmente no início de cada mês no 1º ano: 75,00 euros
   - Os investimentos mensais dentro de cada ano são constantes, mas crescem 2,00% de um ano para o seguinte
   - Prazo: 30 anos ou seja 360 meses
   - Taxa de juro anual efetiva ilíquida de 4,00%
2. Fundamentos teóricos subjacentes
   - Rendas de termos constantes
   - Rendas de termos variáveis em progressão geométrica

- Soma dos termos de uma progressão geométrica
- Conversão de taxas
- Taxas líquidas e taxas ilíquidas

3. Cálculos para verificação do valor indicado na simulação

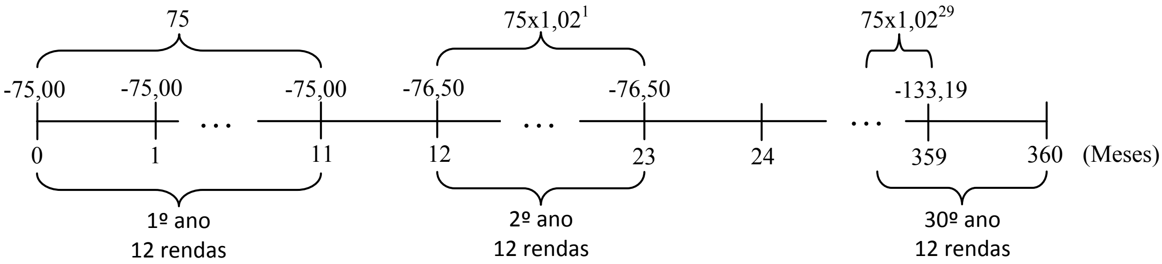
Atendendo a que a taxa anual indicada é efetiva ilíquida, então esta taxa não reflete o efeito fiscal. Conforme apresentamos no capítulo I no ponto 3.3, o efeito da fiscalidade é traduzido pela equação $i_{liq} = (1 - t_{imp})\, i_{iliq}$.

Comecemos por calcular a taxa mensal (ilíquida) $i_{12ilíquida}$,uma vez que as entregas dentro de cada ano são mensais. Conforme foi exposto no capítulo I no ponto 3.1.2, temos que utilizar a relação de equivalência entre taxas efetivas em RCC onde $(1+i) = (1+i_{kilíquida})^k$ .Ora neste caso concreto vem $(1+0{,}04) = (1+i_{12ilíquida})^{12}$, ou seja $i_{12ilíquida} = 0{,}003274$ (apesar de apresentarmos a taxa arredondada à 6ª casa decimal os cálculos foram efetuados sem esse arredondamento).

Analisemos agora o valor dos resgates periódicos. Estes resgates são considerados conjuntos de capitais financeiros, que ocorrerem em intervalos de tempo iguais, no início de cada período. Trata-se pois de um conjunto de capitais que constituem uma renda antecipada e imediata. Quanto aos termos da renda, temos que ter em atenção que são constantes dentro de cada ano, e variáveis quando ocorrem de um ano para o seguinte. Nestas condições, no primeiro caso estamos perante uma renda de termos constantes, no segundo caso estamos perante uma renda de n termos variáveis em progressão geométrica de razão $r = 1{,}02$.

No caso concreto:

- no 1º ano as entregas são mensais, 12 entregas, no valor de 75,00 euros. No 2º ano as entregas mensais terão (cada uma no total de 12) o valor de 75,00 x 1,02 = 76,50 euros, e assim sucessivamente até à última entrega mensal do 30º ano que terá um valor de 75,00 x 1,02 ^{29}= 133,19 euros. Graficamente pode ser representado da seguinte forma:



Como facilmente se verifica as entregas de um ano para o outro crescem anualmente em progressão geométrica de razão igual a 1,02. No entanto estas rendas não podem ser todas tratadas como rendas variáveis em progressão geométrica, uma vez que os termos não variam todos em progressão geométrica. Contudo, comecemos por considerar que são 30 rendas, cada uma com 12 termos mensais e constantes dentro de cada ano. Desta forma considere-se:

- o valor das 12 entregas relativas ao 1º ano reportados ao momento $d + n$ = 0 + 12 = 12.

  Conforme foi exposto no capítulo II no ponto 1.2.2, o valor acumulado de uma renda de temos normais e constantes é dado por:

  $V(d+n) = Cs_{\neg i} = C\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$, então neste caso temos $V(d+n) = Cs_{12\neg 0,003274} = 75 \times \frac{(1+0,003274)^{12}-1}{0,003274} = 916,38$ euros. Tratando-se de uma renda antecipada:

  $$V'(d+n) = (1,003274) \times V(d+n) = 1,003274 \times 75 \frac{(1+0,003274)^{12}-1}{0,003274}$$

  $V'(d+n) = 919,38$ euros

- o valor das 12 entregas relativas ao 2º ano reportados ao momento $d{+}n$ é dado por $V(d+n) = Cs_{12\neg 0,003274} = 76,50 \times \frac{(1+0,003274)^{12}-1}{0,003274} = 934,71$ euros

$$V'(d+n) = (1,003274) \times V(d+n) = 1,003274 \times 76,50 \times \frac{(1+0,003274)^{12}-1}{0,003274}$$

$$V'(d+n) = 937{,}78 \text{ euros}$$

- o valor das 12 entregas relativas ao 3º ano reportados ao momento $d+n$ é dado por $V(d+n) = Cs_{12\neg 0,003274} = 78{,}03 \times \frac{(1+0{,}003274)^{12}-1}{0{,}003274} = 953{,}41 \text{ euros}$

$$V'(d+n) = (1{,}003274) \times V(d+n) = 1{,}003274 \times 78{,}03 \times \frac{(1+0{,}003274)^{12}-1}{0{,}003274} = 956{,}53 \text{ euros}$$

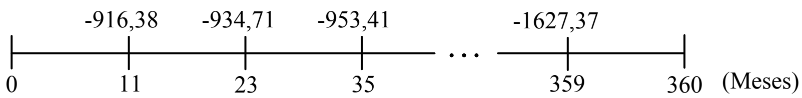
E assim sucessivamente, até chegarmos às últimas 12 entregas relativas ao 30º ano, no momento 359, que é dado por:

$$V(d+n) = Cs_{12\neg 0,003274} = 133{,}19 \times \frac{(1+0{,}003274)^{12}-1}{0{,}003274} = 1.627{,}37 \text{euros}$$

Pelo que, no momento 360

$$V'(d+n) = (1{,}003274) \times V(d+n) = 1{,}003274 \times 133{,}19 \times \frac{(1+0{,}003274)^{12}-1}{0{,}003274} = 1.632{,}70 \text{euros}$$

Graficamente vem:



Como facilmente se verifica cada um destes termos vai crescendo em progressão geométrica de razão r = 1,02 e com o primeiro termo (no momento 11) igual a C_1 = 916,39. Isto significa que estamos perante uma renda de 30 termos anuais variando em progressão geométrica.

O valor acumulado desta renda antecipada com 30 termos anuais variando em progressão geométrica reportadas ao momento $d + n = 0 + 360$ pode ser obtido através da expressão $_{(g)}V(d+n)(1+i) = C \times \frac{r^n - (1+i_{anual\ efet})^n}{r-(1+i_{anual\ efet})} \times (1+i)$, onde

C_1 = 916,38 (valor do 1º termo)

r = 1,02 (razão)

n = 30 (número de termos)

i = 0,04 (o período da renda é o ano logo utilizamos a taxa anual efetiva)

Então,

$$_{(g)}V(d+n)(1+i) = 916{,}38 \times \frac{1{,}02^{30} - (1+0{,}04)^{30}}{1{,}02 - (1+0{,}04)} \times (1+0{,}003274)$$

$$_{(g)}V(d+n)(1+i) = 65.829{,}26 \text{ euros}$$

Para calcular o valor acumulado líquido é necessário agora calcular 8% do rendimento (juro) obtido. O rendimento obtido é:

Rendimento (juro) bruto = 65.829,26 – Valor que o cliente investiu

Vejamos então o valor que o cliente investiu:

- No 1º ano: 12 x 75,00 ou seja 900,00 euros
- No 2º ano: 12 x (75,00x1,02) ou seja 918,00 euros
- No 3º ano: 12 x (75,00x$1{,}02^2$) ou seja 936,36 euros
- No 4º ano: 12 x (75,00x$1{,}02^3$) ou seja 955,09 euros

………….

- No 30º ano: 12 x (75,00x$1{,}02^{29}$) ou seja 1.598,26 euros

Ora a soma de todos estes valores não é mais do que a soma dos termos de uma progressão geométrica em que:

C_1 = 900 (valor do 1º termo)

r = 1,02 (razão)

n = 30 (número de termos)

Assim, uma vez que a soma dos n termos de uma progressão geométrica é dada por:

$S_{pg} = C_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$, então vem:

Total investido pelo cliente $= S_{pg} = 900 \times \frac{1{,}02^{30} - 1}{1{,}02 - 1} = 36.511{,}27$ euros

Desta forma já conseguimos calcular o rendimento bruto:

Rendimento (juro) bruto = 65.829,26 – 36.511,27 = 29.317,99 euros

Deste modo o imposto será

Imposto = 29.317,99 x 0,08

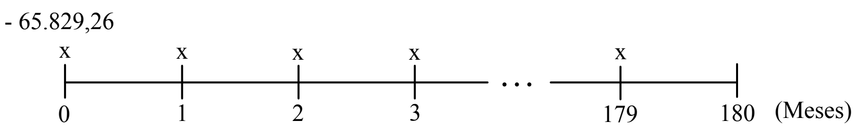
Imposto = 2.345,44 euros

Logo o valor acumulado líquido resgatado no final do prazo será:

Valor acumulado líquido = 65.829,26 – 2.345,44

Valor acumulado líquido = 63.483,82 euros (atendendo aos arredondamentos feitos nos vários cálculos podemos considerar que o valor é aproximadamente igual a 63.484,03 euros, conforme devolve o simulador).

Passemos agora à segunda situação. Acontece que como descrito em vez de optar por receber o valor do resgate periódico de uma só vez, ele pode optar por ser reembolsado mensalmente, durante 15 anos (180 meses) a título de complemento de reforma. Segundo o simulador ele terá então direito a receber mensalmente 482,99 euros. Graficamente pode ser representado da seguinte forma:



No resgate periódico ilíquido de IRS, devemos considerar o valor acumulado ilíquido para efetuar os cálculos. Desta forma apenas é necessário fazer uma equivalência de capitais entre o valor acumulado ilíquido e as 180 mensalidades constantes e antecipado, conforme se deduz do simulador. Utilizando a taxa mensal ilíquida $i_{12iliquida}$, calculada anteriormente, vem

$$\underbrace{65.829,26}_{\text{Valor reportado ao momento } 0} = x\, a_{180\neg 0,003274} \times (1+0,003274)^{1}$$ e atendendo a que

$$a_{180\neg 0,003274} = \frac{1-(1+0,003274)^{-180}}{0,003274} = 135,85$$

$x =$ 482,99 euros (conforme indica o simulador).

1.3 Caso real 3 - Estudo pormenorizado do produto capital garantido apresentado pelo banco BES.

Banco	Produto	Conceitos teóricos subjacentes mais relevantes
BES	Capital Garantido	Rendas de termos constantes; conversão de taxas
Extraído e adaptado de: http://www.bes.pt/sitebes/cms.aspx?plg=087FFC2D-E3E9-4B2C-A419-42404011BE55		

Informação extraída

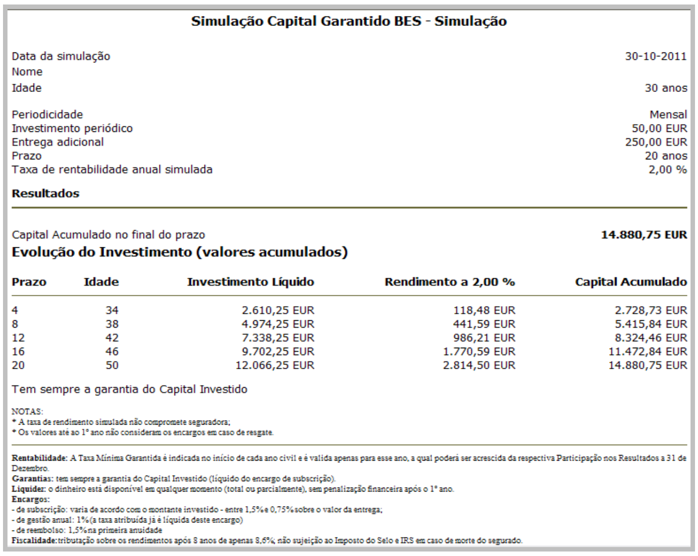
Simulação Capital Garantido BES - Conclusão

Data da simulação	30-10-2011
Opção	Capital Garantido BES
Idade	30
Periodicidade do investimento	Mensal
Investimento periódico	50,00 EUR
Entrega adicional	250,00 EUR
Prazo de aplicação	20 anos
Taxa de rentabilidade anual simulada	2,00 %
Capital Acumulado no final do prazo	14.880,75 EUR

Tem sempre a garantia do Capital Investido

Figura 5 – Informação extraída: *BES capital garantido.*

Informação ao cliente



Simulação Capital Garantido BES - Simulação

Data da simulação	30-10-2011
Nome	
Idade	30 anos
Periodicidade	Mensal
Investimento periódico	50,00 EUR
Entrega adicional	250,00 EUR
Prazo	20 anos
Taxa de rentabilidade anual simulada	2,00 %

Resultados

Capital Acumulado no final do prazo **14.880,75 EUR**

Evolução do Investimento (valores acumulados)

Prazo	Idade	Investimento Liquido	Rendimento a 2,00 %	Capital Acumulado
4	34	2.610,25 EUR	118,48 EUR	2.728,73 EUR
8	38	4.974,25 EUR	441,59 EUR	5.415,84 EUR
12	42	7.338,25 EUR	986,21 EUR	8.324,46 EUR
16	46	9.702,25 EUR	1.770,59 EUR	11.472,84 EUR
20	50	12.066,25 EUR	2.814,50 EUR	14.880,75 EUR

Tem sempre a garantia do Capital Investido

NOTAS:
* A taxa de rendimento simulada não compromete seguradora;
* Os valores até ao 1º ano não consideram os encargos em caso de resgate.

Rentabilidade: A Taxa Mínima Garantida é indicada no início de cada ano civil e é valida apenas para esse ano, a qual poderá ser acrescida da respectiva Participação nos Resultados a 31 de Dezembro.
Garantias: tem sempre a garantia do Capital Investido (líquido do encargo de subscrição).
Liquidez: o dinheiro está disponível em qualquer momento (total ou parcialmente), sem penalização financeira após o 1º ano.
Encargos:
- de subscrição: varia de acordo com o montante investido - entre 1,5% e 0,75% sobre o valor da entrega;
- de gestão anual: 1% (a taxa atribuída já é líquida deste encargo)
- de reembolso: 1,5% na primeira anuidade
Fiscalidade: tributação sobre os rendimentos após 8 anos de apenas 8,6%; não sujeição ao Imposto do Selo e IRS em caso de morte do segurado.

Figura 6 – Informação ao cliente: *BES capital garantido.*

Objetivo

Confirmar os seguintes valores devolvidos pelo simulador: valor acumulado antes de imposto (14.880,75 euros) e valor líquido de imposto (12.066,25 euros).

Descrição da situação

Este simulador consiste na aplicação de um produto de investimento em capital garantido onde há uma entrega inicial de 250,00 euros, seguida de entregas mensais e constantes no valor de 50,00 euros durante 20 anos. O simulador permite escolher a taxa de rentabilidade anual, que neste caso é de 2,00%.

Resolução

1. Dados relevantes

- Investimento inicial: 250,00 euros
- Capital investido mensalmente, após entrega inicial: 50,00 euros
- Prazo: 20 anos ou seja 240 meses
- Taxa de rentabilidade anual de 2,00% (apesar de não ser dito trata-se de uma taxa anual efetiva bruta)
- Apesar de não ser dito as entregas são antecipadas
- Taxa de imposto sobre os juros ao fim do 8º ano é de 8,60%
- Encargos de subscrição variam de acordo com o montante investido, entre 1,50% e 2,00% sobre o valor das entregas. Até 5.000,00 euros os valores dos encargos de subscrição são de 1,50%. Não estando esta informação disponibilizada no simulador, a mesma foi obtida após solicitação à instituição bancária.

2. Fundamentos teóricos subjacentes

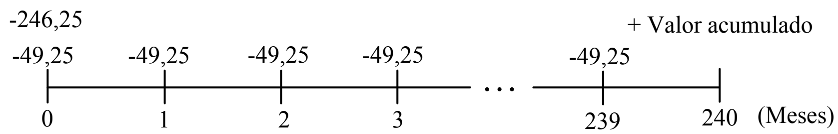
- Rendas de termos constantes e antecipados
- Regime de juro composto
- Conversão de taxas
- Taxas líquidas e taxas ilíquidas

3. Cálculos para verificação do valor indicado na simulação

Atendendo a que a taxa indicada pelo simulador é uma anual efetiva ilíquida, temos sempre que ter presente que a taxa não reflete o efeito fiscal. Ou seja, há que ter em atenção que $i_{liq} = \left(1 - t_{imp}\right) i_{iliq}$. Como se pretende que as entregas sejam mensais, então temos que encontrar, através de uma relação de equivalência, a taxa correspondente, ou seja $(1+i) = \left(1 + i_{kilíquida}\right)^k$. Ora neste caso concreto vem $(1+0{,}02) = (1+i_{12ilíquida})^{12}$, ou seja $i_{12iíquida} = 0{,}001652$ (apesar de apresentarmos a taxa arredondada à 6ª casa decimal os cálculos foram efetuados sem esse arredondamento).

Conforme é indicado pela simulação as entregas são periódicas, constantes e ocorrem em intervalos de tempo de um mês. Novamente, e apesar de não estar explícito no simulador trata-se de entregas antecipadas e imediatas. Face a esta renda antecipada, sabemos que o valor acumulado $V'(d+n)$ é tal que $V'_d(t) = (1+i)Cs_{n\neg i}$. Na origem desta renda é entregue um capital único de 250,00 euros e a primeira entrega do capital investido mensalmente é no valor de 50,00 euros (a estes valores temos que descontar 1,50% dos encargos de subscrição).

Comecemos por representar esquematicamente a situação:



Assim o valor acumulado ilíquido $V`_{d+n}(t)$ gerado por todas as entregas é dado por:

$$\underbrace{V'_{ilíquido}(240)}_{\substack{\text{Capital acumulado ilíquido} \\ \text{no momento 240}}} = \underbrace{246{,}25 \times (1+0{,}001652)^{240}}_{\substack{\text{Valor dos 246,25 euros iníciais} \\ \text{reportados ao momento 240}}} + 49{,}25 \times \frac{(1+0{,}001652)^{240} - 1}{0{,}001652} \times (1+0{,}001652)^1$$

$V'_{ilíquido}(240) = 365{,}91 + 14.514{,}84 = 14.880{,}75$ euros conforme devolve o simulador.

Vejamos então o valor que o cliente investiu:

- No 1º ano: 246,25 euros mais 12 entregas de 49,25 euros, num total de 837,25 euros
- No 2º ano: 12 entregas de 49,25 euros, num total de 591,00 euros

…………..

- No 20º ano: 12 entregas de 49,25 euros, num total de 591,00 euros

O total do investimento no final do 20º ano é de 12.066,25 euros (descontados os encargos de subscrição). Este valor 12.066,25 euros, o simulador considera que é o valor líquido. No entanto, o valor líquido deveria ser considerado o total do valor acumulado descontado do imposto sobre os juros produzidos (à taxa de 8,60%).

Desta forma vem:

O valor acumulado líquido $s_{n\neg líquido}$ é calculado do mesmo modo mas com a taxa mensal líquida, onde

$$i_{12liq} = 0{,}001652 \times 0{,}914 = 0{,}001509 \quad (100\% - 8{,}60\%)$$

$$\underbrace{V'(240)_{líquido}}_{\text{Capital acumulado líquido no momento 240}} = \underbrace{246{,}25 \times (1+0{,}001509)^{240}}_{\text{Valor dos 246,25 euros iníciais reportados ao momento 240}} + 49{,}25 \times \frac{(1+0{,}001509)^{240}-1}{0{,}001509} \times (1+0{,}001509)^{1}$$

$$V'(240)_{líquido} = 353{,}70 + 14.254{,}31 = 14.608{,}01 \text{ euros}$$

1.4 Caso real 4 - estudo pormenorizado do produto poupança complementar apresentado pelo banco Montepio.

Banco	Produto	Conceitos teóricos subjacentes mais relevantes
Montepio	Poupança Complementar	Rendas de termos constantes antecipadas; conversão de taxas
Extraído e adaptado de: http://www.montepio.pt/SitePublico/pt_PT/particulares/simuladores/simuladoresmontepio.page?altcode=12094PET#		

Informação extraída

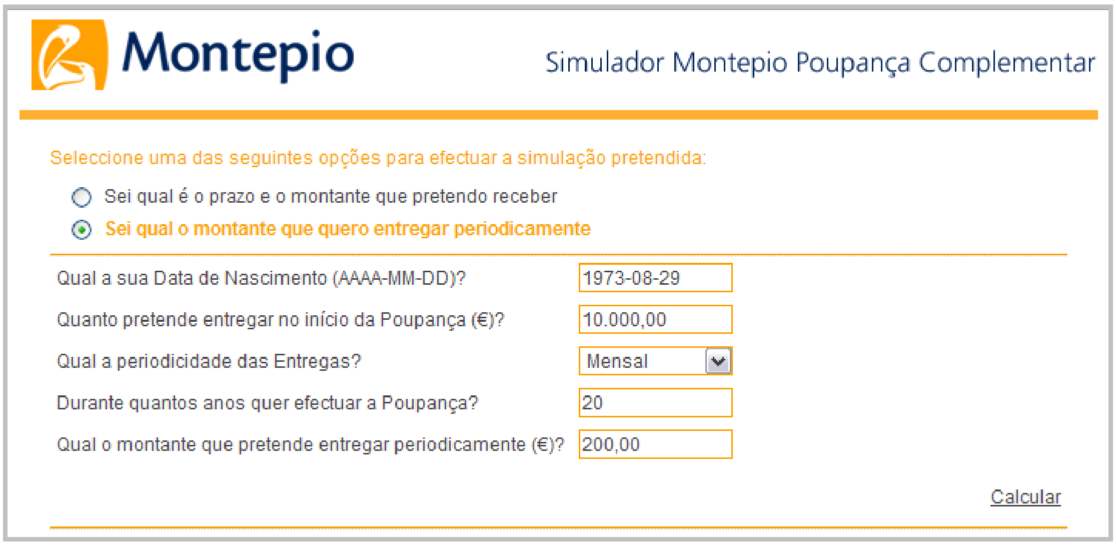
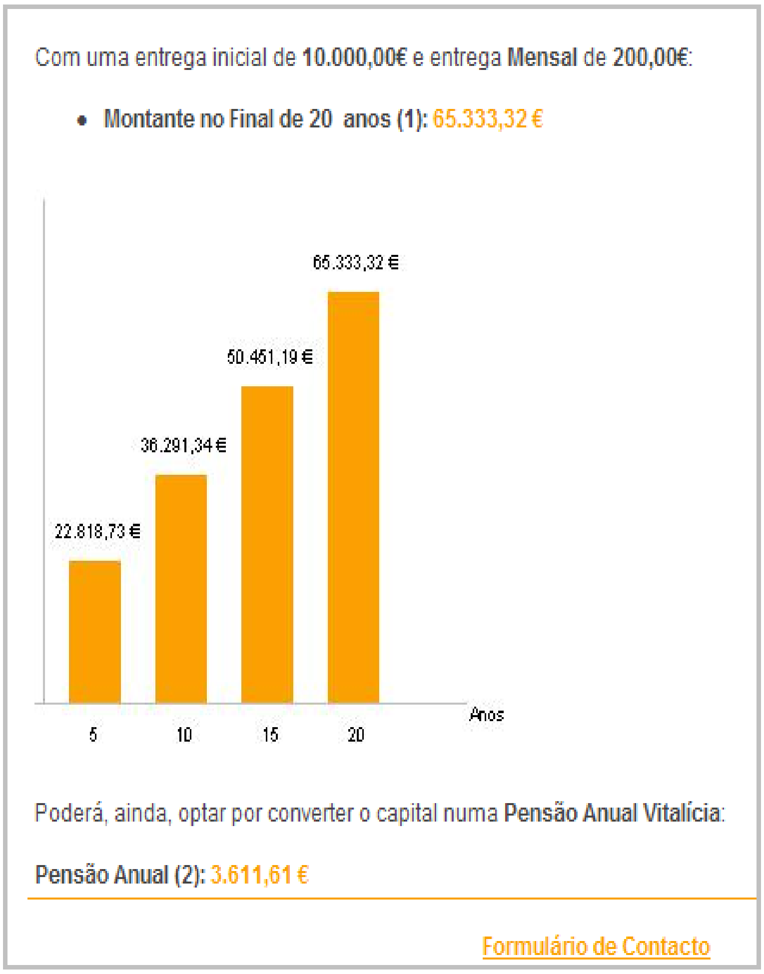


Figura 7 – Informação extraída: *Montepio poupança complementar.*

Informação ao cliente



Formulário de Contacto

Esta simulação é meramente indicativa, não contemplando eventuais alterações de taxas ou de bonificações.

(1) Projecção efectuada considerando um rendimento global anual à taxa simulada de 1,00% , a qual não envolve qualquer responsabilidade para o Montepio Geral - Associação Mutualista. Esta modalidade tem uma taxa de rendimento anual mínimo garantido correspondente à média anual da taxa de referência do BCE, deduzida de 0,6%, ao qual acresce a parte dos resultados anuais da modalidade, que for atribuída por deliberação da Assembleia Geral.

(2) A transformação, parcial ou total, do capital acumulado numa pensão anual vitalícia, é efectuada de acordo com as bases técnicas das Rendas Vitalícias em vigor à data da respectiva conversão. Os valores apresentados resultam da conversão total do capital acumulado, e foram calculados com base nas tabelas das Rendas Vitalícias actualmente em vigor, não constituindo compromisso, por parte do Montepio, de que o valor daquelas tabelas se manterá aquando da eventual conversão efectiva em pensão.

Figura 8 – Informação ao cliente: *Montepio poupança complementar.*

Objetivo

Confirmar o valor devolvido pelo simulador: valor acumulado no final de 20 anos (65.333,32 euros).

Descrição da situação

Este simulador consiste na aplicação de um produto de investimento poupança complementar onde há uma entrega inicial de 10.000,00 euros, seguida de entregas mensais e constantes no valor de 200,00 euros durante 20 anos, assumindo uma taxa anual de 1,00%.

Resolução

1. Dados relevantes

- Investimento inicial: 10.000,00 euros
- Capital investido mensalmente, após entrega inicial: 200,00 euros (embora não seja explícito na informação ao cliente mas os termos da renda são antecipados)
- Prazo: 20 anos ou seja 240 meses
- Taxa anual de 1,00% (apesar de não ser dito trata-se de uma taxa efetiva)

2. Fundamentos teóricos subjacentes

- Rendas de termos constantes e antecipados
- Regime de juro composto
- Conversão de taxas

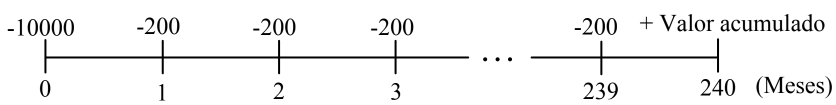
3. Cálculos para verificação do valor indicado na simulação

Como já foi referido em cima apesar de o simulador não o referir de forma explícita a taxa indicada é anual efetiva. Como se pretende que as entregas sejam mensais, então temos que utilizar a relação de equivalência entre taxas efetivas em RCC onde $(1+i)=(1+i_k)^k$ .Então neste caso vem $(1+0{,}01) = (1+i_{12})^{12}$, ou seja

$i_{12} = 0{,}000830$ (apesar de apresentarmos a taxa arredondada à 6ª casa decimal os cálculos foram efetuados sem esse arredondamento).

As entregas são constantes e periódicas e ocorrem em intervalos de tempo de um mês. Não é referido no simulador mas as entregas mensais são antecipadas. Conforme estudamos no capítulo II no ponto 1.2.1, a este conjunto de capitais financeiros dá-se o nome de renda antecipada, ou seja $\{C_r, d+(r-1)P\}_{r=1,2,\ldots,n}$ tal que $t_{r+1}-t_r = P,\ \forall r$, e o valor acumulado é dado pela expressão $V_d^{'}(t) = \sum_{r=1}^{n} C_r(1+i)^{t-(d+r-1)}$ .Na origem desta renda é entregue um capital único no valor de 10.000,00 euros.

Represente-se esquematicamente a situação:



Assim o valor acumulado gerado por todas as entregas é dado por:

$$V(240) = 10.000 \times (1+0{,}000830)^{240} + 200 \times \frac{(1+0{,}000830)^{240}-1}{0{,}000830} \times (1+0{,}000830)^{1}$$

$V(240) = 12.201{,}90 + 53.131{,}42 = 65.333{,}32$ euros, conforme indica o simulador.

No ponto que agora termina analisamos os produtos novo aforro apresentado pelo BPI, plano poupança reforma apresentado pelo BPI, capital garantido apresentado pelo BES e poupança complementar apresentado pelo Montepio Geral, e demonstramos os princípios teóricos subjacentes nos produtos e simuladores destas instituições financeiras. No ponto seguinte, são estruturadas as principais conclusões decorrentes do presente trabalho.

No capítulo que agora terminamos, descrevemos e apresentámos os casos de estudo que constituem a parte empírica deste trabalho. Ao longo do capítulo foi sempre procurado deduzir os resultados empíricos do caso com a conceptualização teórica que os suporta, procurando responder às questões de investigação atrás enunciadas. No capítulo que se segue apresentam-se as principais conclusões extraídas deste trabalho.

CAPÍTULO V - CONCLUSÕES DO ESTUDO

1. Conclusões

Neste capítulo, terminamos o trabalho de investigação a que nos propusemos, procurando não só perceber e analisar os resultados obtidos à luz do referencial teórico e dos objetivos definidos, mas sobretudo, fundamentar a discussão em torno dos contributos deste trabalho.

Para orientar o debate, comecemos por rever, de forma resumida, o trabalho desenvolvido. Assim, e a partir das questões de investigação por nós propostas, refletimos sobre a contextualização teórica onde o nosso tema de estudo se insere. De seguida, justificámos a metodologia utilizada na parte empírica da investigação, explanando, igualmente, a forma de recolha e tratamento dos dados. A apresentação da parte prática do processo foi posteriormente apresentada, justificando os resultados obtidos decorrentes da aplicação teórica dos conceitos introduzidos. Procurando dinamizar o debate em torno do objeto de estudo, apresentamos as nossas próprias reflexões, enfatizando o que podemos considerar como contributo fundamental desta investigação para o avanço do conhecimento. A terminar, indicamos as principais dificuldades encontradas e apontamos vias de trabalho futuro.

Balizados por este contexto, recuperamos aqui as questões de investigação que nortearam o estudo: é possível desmistificar a designação “cálculo financeiro” e transpô-la dos manuais da área para o dia-a-dia, partindo de ferramentas que ajudem a resolver problemas concretos da relação entre as instituições financeiras e os seus clientes? A quantidade de informação pública disponibilizada pelas diferentes instituições financeiras, revela-se transparente na forma como a mesma se apresenta ao consumidor?

Tendo esta problemática como pano de fundo, retomamos os conceitos base apontados na revisão do estado da arte sobre o assunto. Assim, durante o primeiro capítulo deste trabalho, apresentámos e justificámos quer os conceitos que suportam toda a linguagem financeira, quer as relações entre os mesmos que permitiram estabelecer ligações necessárias à sua boa compreensão. Mais concretamente, estudámos juro, taxas de juro, processos de capitalização, de atualização e de equivalência financeira. Seguidamente, a nossa reflexão evoluiu para o estudo das rendas, uma vez que o mesmo se constitui como um ponto-chave em grande número de aplicações financeiras. Novamente referimos aqui a intenção que foi colocada na revisão da literatura, permitindo que o campo teórico referenciado não incluísse tão somente um conjunto de fórmulas a utilizar na parte empírica, mas construindo um conjunto de conceitos e analisando as suas conexões, por forma a permitir o melhor entendimento do assunto em estudo. Embora se tivesse procurado evitar um excessivo desenvolvimento teórico, optámos por fazer a dedução das fórmulas apresentadas, no sentido do bom entendimento dos conceitos envolvidos. Foi também procurada uma simplicidade na apresentação da matéria sem, no entanto, descurar o rigor que devem observar as regras e procedimentos do cálculo financeiro.

Na articulação entre o quadro conceptual e as questões de investigação propostas, fomos conduzidos à fundamentação das opções metodológicas que presidiram à parte empírica do estudo. Neste sentido, demos conta de um conjunto diversificado de instituições financeiras e de produtos financeiros potencialmente interessantes do ponto de vista do cumprimento dos objetivos traçados. Reforçamos, neste ponto, que a intenção do trabalho nunca foi a de propormos uma análise nem exaustiva nem comparativa das condições oferecidas pelas diferentes instituições. Mesmo que o quiséssemos, o facto da oferta financeira se encontrar tão presente no modelo social em que nos integramos, aliado ao facto de esta oferta se revelar tão volátil (porque continuamente em alteração) como tão efémera (porque transitória), retornaria um trabalho desatualizado logo que o mesmo fosse terminado.

De facto, a intenção do trabalho, de acordo com o contexto proposto orientou-se, apenas, pela ideia de obter um conjunto diversificado de instituições e produtos capazes de permitirem dar orientações de resposta às questões de investigação anteriormente formuladas. Procurando ilustrar o quadro teórico referenciado, desenvolvemos quatro casos de estudo associados a diferentes produtos financeiros, recolhidos através dos simuladores de três instituições bancárias – BES, BPI e o Montepio.

Para cada um deles, começámos por apresentar tanto a informação extraída do simulador, como a informação ao cliente que era fornecida pela instituição bancária. De seguida e de acordo com o objetivo geral, formalizámos a intenção de demonstrar como os conceitos teóricos do cálculo financeiro se relacionavam com a informação apresentada nos simuladores. Neste ponto, e antes da resolução propriamente dita do caso sob estudo, procedemos à descrição da situação em análise, contextualizando o caso do ponto de vista teórico. Na parte final de cada caso, e já dentro do processo de resolução, para além de uma recolha sintética dos dados relevantes e da apresentação dos fundamentos teóricos subjacentes, apresentámos os cálculos para verificação dos valores indicados na simulação. Se em todos os casos apontados foi, salvo erros de arredondamento, possível chegar aos valores devolvidos pelos simuladores, também é certo que foi preciso ler nas entrelinhas de algumas instituições o verdadeiro significado de alguns valores apontados. Referimo-nos, em concreto, a algumas taxas referenciadas ou à caraterização de algumas rendas utilizadas.

Neste ponto, questionamo-nos se parte da justificação para estas questões se prende com algum analfabetismo financeiro de que o cidadão comum pode enfermar. De facto, não se esperando que o cidadão comum utilizador dos simuladores propostos pelas instituições bancárias, seja conhecedor da linguagem mais técnica associada à literacia financeira, é possível entender que haja alguma preocupação das instituições em adaptar aquela mesma linguagem à prática corrente.

Um outro aspeto que nos merece especial relevo, refere-se ao facto de nos parecer bastante útil a utilização de simuladores e a acessibilidade que os mesmos oferecem. Podendo ser encontradas diferentes justificações para o uso de simuladores, parece-nos importante referir que, mesmo que os cálculos associados à obtenção dos valores encontrados possam ser de fácil tratamento para clientes com formação na área financeira, não o serão, certamente, para o cidadão comum. Ou seja, os simuladores, para além de poderem dar resposta, na hora e em qualquer lugar, a uma situação concreta colocada, substituem toda uma série de fórmulas e cálculos que seriam de todo fastidiosos se fosse necessário serem apresentados.

Mais ainda, com o presente trabalho parece-nos ser possível evidenciar três contributos fundamentais:

1) por um lado a enorme aplicação prática de alguns conceitos do cálculo financeiro. Pois é a ferramenta essencial quer para as finanças empresariais quer para os não financeiros. O domínio dos conceitos financeiros e a facilidade de compreender o cálculo financeiro são condições necessárias quer para um gestor de topo, quer para um comum cidadão. Desta forma, acreditamos que os conceitos básicos de cálculo financeiro, deveriam ser considerados condição de cidadania e até mesmo introduzidos em unidades curriculares do ensino obrigatório. Pois a compra de casa, carro ou a constituição de um plano poupança reforma são tão recorrentes na nossa sociedade que seria muito útil que todos se sentissem confortáveis com a informação financeira que as instituições apresentam ao consumidor, de forma a poder ser verificada e controlada. Conforme refere Canadas (1998) num cenário como o atual, o custo da informação é cada vez menor mas paradoxalmente o custo do saber é cada vez maior.

2) por outro lado, e consequência do primeiro aspeto pretende-se desmistificar a designação “cálculo financeiro” e transpô-la dos manuais da área para o dia-a-dia e proporcionar ferramentas capazes de ajudarem a resolver problemas do quotidiano. Conforme refere Canadas (1998), a temática do cálculo financeiro tem interesse quer para os técnicos de gestão que no seu dia-a-dia têm de usar instrumentos da matemática financeira para fundamentar as suas decisões, o autodidata e o investidor esclarecido.

3) por último, mostrar que apesar das inúmeras críticas às instituições financeiras, encontram-se exemplos de informação pública transparente disponibilizada ao consumidor. No entanto, temos que destacar que alguma informação financeira disponibilizada não apresenta a precisão dos conceitos teóricos subjacentes ao cálculo financeiro, apesar de poder fazer sentido para o consumidor menos preocupado com o rigor destes conceitos.

Terá que ser salientado o esforço da banca, de uma forma geral, em disponibilizar ferramentas úteis para o consumidor, como é o caso dos simuladores. No entanto, também se evidencia que o padrão de disponibilização de informação não é uniforme e portanto há instituições financeiras que prestam mais e melhor informação.

Por fim, dada a aplicabilidade do cálculo financeiro, acentuamos a importância de conseguirmos dar respostas a questões como:

- Quanto receberei por uma aplicação de determinado capital no final de um determinado período de tempo?
- Qual o valor que devo depositar periodicamente para atingir uma determinada poupança desejada?
- Qual o valor a receber numa determinada poupança se optar por um resgate periódico?

Ao longo de todo o trabalho várias foram as dificuldades encontradas. Desde logo referimos o pouco tempo permitido para a sua realização, dadas as limitações existentes numa tese de mestrado adaptada a Bolonha. Por tal facto, não nos foi possível abordar outros temas, de muito interesse para uma conclusão mais abrangente deste estudo. Referimo-nos, nomeadamente, ao caso das amortizações de empréstimos clássicos ou empréstimos obrigacionistas aplicados aos produtos disponibilizados pelas instituições. Mais ainda, sendo o *leasing* uma outra forma correntemente usada, poderia ser igualmente útil, a exploração da mesma, na linha que enforma a presente tese. Desta forma, é por nós considerado de todo o interesse a abordagem destes temas numa possível continuação deste trabalho. Assim sendo, ficam os mesmos apontados como sugestões de trabalho futuro.

BIBLIOGRAFIA

ACABEM - Defesa contra os abusos dos bancos [em linha]. [Consult. 15.Dezembro.2011]. Disponível em WWW:<URL:http://www.acabem.com/bancos-portugal.htm>.

ALMEIDA, J. F. ; PINTO, J. M. - Da teoria a investigação empírica. Problemas metodológicos gerais. In: PINTO, J. M. ; SILVA, A. S. - Metodologia das ciências sociais (Vol.6). Santa Maria da Feira: Edições Afrontamento, 2003. ISBN 972-36-0503-1,

BELL, J. - Como realizar um projecto de investigação: um guia para a pesquisa em ciências socias e educação. 5ª ed. Lisboa: Gradiva, 2010. ISBN 978-972-662-524-7.

CADILHE, M.; SOARES, C. - Lições de Matemática Financeira e noções complementares. Rio Tinto: Asa, 1988.

CADILHE, M. - Matemática Financeira Aplicada. 4ª ed. Porto: Edições Asa, 1995. ISBN 972-41-1214-4.

CANADAS, NATÁLIA - A Matemática do Financiamento e das Aplicações de Capital. 1ª ed. Lisboa: Plátano Editora, S.A., 1998. ISBN 972-621-976-0.

EBF - Euribor-EBF [em linha]. [Consult. 13.Maio.2011]. Disponível em WWW:<URL:http://www.euribor-ebf.eu/>.

GHAURI, P.; GRONHAUG, K. - Research Methods in Business Studies, a practical Guide. 2th ed. London: Prentice Hall Europe, 2005. ISBN 978-0-273-68156-4.

LÓPEZ, A. P. - Matemática de las operaciones financieras: prestamos, empréstitos, otras operaciones financieras. 3ª ed. Madrid: UNED, 2009. ISBN 978-843-6237-74-0.

MATEUS, J. M. A. - Cálculo Financeiro. 5ª ed. Lisboa: Edições Sílabo, 1999. ISBN 972-618-198-4.

MATIAS, ROGÉRIO - Cálculo Financeiro Teoria e Prática. . 3ª ed. Lisboa: Escolar Editora, 2009. ISBN 978-972-592-243-9.

PARDAL, L. ; CORREIA, E. - Métodos e técnicas de investigação social. 1ª ed. Porto: Areal Editores, 1995. ISBN 972-627-344-7.

QUELHAS, A.P.S.; CORREIA, F. - Manual de Matemática Financeira. 2ª ed. Coimbra: Almedina, 2009. ISBN 978-972-40-3918-3.

RODRIGUES, A.; NICOLAU, I. - Elementos de Cálculo Financeiro. 9ª ed. Lisboa: Áreas Editora, 2010. ISBN 978-989-8058-52-2.

RODRIGUES, M.; MARTINHO, R. - Leasing: uma Opção de Financiamento. 4ª ed. Lisboa: Texto Editora, 1990. ISBN 978-972-470-127-1.

SAIAS, L.; CARVALHO, R.; AMARAL, M., C. - Instrumentos Fundamentais de Gestão Financeira. 4ª Ed. Lisboa: Universidade Católica Portuguesa, 2004. ISBN 972-54-0096-8

SILVA, A. N. - Matemática das Finanças: mercado de capitais e derivados. Portugal: McGraw-Hill, 1993-1994. ISBN 972-9241-36-6

YIN, R. - Case study research. Design and methods. 3ª ed. Thousand Oaks: Sage Publications, 2009. ISBN 0-7619-2553-8.